1. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2005/06
Wiederholung Grundwissen Klassen 8/9/10

Abgabetermin 04.10.05

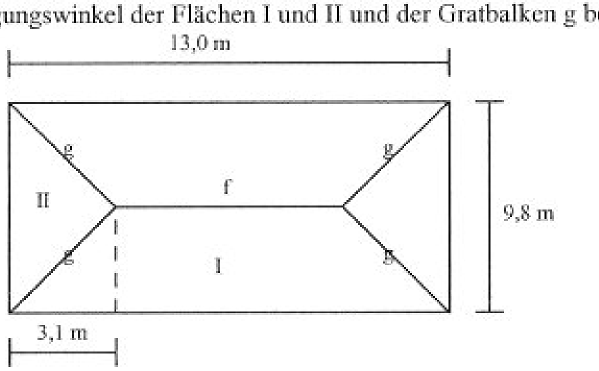
1. Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die auf derselben Seite von g liegen.
   a) Konstruiere einen Punkt C so auf g, dass der Winkel ACB ein rechter Winkel ist.
   b) Ist die Aufgabe für jede Lage von A, B und g lösbar? Wie viele Lösungen gibt es in den einzelnen Fällen?

2. Vereinfache die Terme!
   a) $\lg(2a)-2\lg(a)+\lg(a^2)+\lg(a^{-1})$ b) $\lg(\sqrt{x})-\lg(\sqrt{4x})+\lg(0{,}5x^2)+\lg(4)$
   c) $(\sqrt{a}\sqrt{b}):(\sqrt{abc})$
   d) $\sqrt{\frac{xy^2z}{16}}\cdot(\sqrt{\frac{4x}{5z}}:\sqrt{\frac{5}{x}})$ e) $\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{4}{9}x+\frac{4}{27}}$
   f) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$ g) $(8x^2)^{\frac{3}{2}}(8x)^2$
   h) $(a^{n+3}-3a^n-a^{n-3}):a^{-3}$
   i) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b}:\frac{x^4y^{-3}}{6ab^2}$ j) $\frac{p^3q^{-2}}{r^{-4}s^{-5}}:\frac{r^{-6}s^{-1}}{p^{-1}q^2}$ k) $\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}}\cdot\frac{(xy)^2}{a^3b}$

3. Führe eine Polynomdivision durch!
   a) $(x^4+2x^3+4x-1):(x^2+2)$ b) $(x^{n+2}+x^{n+1}-2x^2-2x):(x^n-2)$

4. Löse folgende Gleichungen! Beachten Sie bei Aufgabe e) den Definitionsbereich der Gleichung!
   a) $2^{x+1}\cdot 4^{2x-2}=8^x$ b) $10\cdot 5^{3x-1}=2\cdot 5^{x+1}$ c) $\lg(5-4x)=\lg(1+4x)$
   d) $\lg(x)=2\lg(x)+\lg(1+x)$ e) $(x^2-5x-9)^{0,5}=(4x+1)^{0,5}$

5. Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Walmdaches. Der First (Länge f) befindet sich 4,1 m über dem Dachboden. Berechne die Neigungswinkel der Flächen I und II und der Gratbalken g bezüglich des Dachbodens.



6. Aus einer Urne mit fünf roten und sechs weißen Kugeln werden nacheinander mit Zurücklegen drei Kugeln auf gut Glück entnommen.
   I) Entwickle ein Baumdiagramm und ermittle die Ergebnismenge dieses Zufallsexperiments.
   II) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man
      a) drei rote Kugeln zieht,
      b) das Ereignis {rot,weiß,rot} eintritt,
      c) genau eine rote Kugel zieht,
      d) höchstens zwei weiße Kugeln findet?

7. GTR-Aufgabe:
   Löse die Gleichung $5x+1=4^x$. (Lösung auf Tausendstel genau)

2. Prüfungskomplex - Mathematik 2004/05
- Zahlenfolgen und Grenzwerte -

Fertigstellung: 1.November 2005

1. Berechnen Sie!

a) $\sum\limits_{i=1}^{7} 2^i$ b) $\sum\limits_{k=2}^{10} k-3$ c) $\sum\limits_{i=1}^{4} i^3 + \sum\limits_{i=5}^{8} i^3 - \sum\limits_{i=1}^{8} i^3$ d) die Summe aller ungeraden Zahlen unter 400

2. Stellen Sie die Summe mit Summenzeichen dar und berechnen Sie!
$180 + 130 + 80 + 30 - 20 \ldots - 820$

3. Beweisen Sie folgende Aussage: „Eine konvergente Zahlenfolge hat höchstens einen Grenzwert."

4. Eine Zahlenfolge (a_n) hat die Folge der Partialsummen (s_n) mit der Bildungsvorschrift:

$$s_n = \frac{2n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0).$$

a) Geben Sie die Glieder s_1 bis s_5 der Folge (s_n) an!
b) Untersuchen Sie die Folge (s_n) auf Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen und Konvergenz!
c) Berechnen Sie den Grenzwert von (s_n), falls dieser existiert.
d) Wie viele Glieder der Folge (s_n) sind kleiner als 1,99?
e) Berechnen Sie die Glieder a_1 bis a_5 und a_n der Folge (a_n)!

5. Untersucht werden die drei Zahlenfolgen (a_n), (b_n) und (c_n), $n \geq 1$.

a) (a_n) ist durch

$$a_n = \frac{3n+21}{2n-1} \quad \text{gegeben.}$$

- Berechnen Sie die Glieder a_3 und a_5.
- Weisen Sie nach, dass die Zahl 2,5 kein Glied der Folge ist.
- Zeigen Sie, dass 2 keine Schranke von a_n ist.

b) (b_n) ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $b_3 = a_3$ und $b_5 = a_5$.
(s_n) ist die zu (b_n) gehörende Partialsummenfolge.
- Geben Sie eine explizite Zahlenfolge für (b_n) an!
- Berechnen Sie s_1, s_2 und s_3!
- Geben Sie eine Summenformel für (b_n) an!

c) (c_n) ist eine geometrische Zahlenfolge mit $q > 0$ und $c_3 = a_3$ und $c_5 = a_5$.
- Geben Sie eine explizite Zahlenfolge (c_n) an!
- Ermitteln Sie, wie viele Glieder von (c_n) größer als 0,1 sind!

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^{-2}$ $(x > 0)$.
Das Bild der Funktion, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 2$ begrenzen die Fläche A_1 vollständig. Die n-te Fläche A_n wird durch das Bild der Funktion f, die x-Achse und die Geraden $x = n$ und $x = n + 1$ vollständig begrenzt $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_n!
b) Die Flächeninhalte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden die Zahlenfolge A_n. Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der dazugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
c) Geben Sie eine Vermutung für das n-te Glied dieser Partialsummenfolge an!
d) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

3.Prüfungskomplex Mathematik 05/06 (Abgabetermin: 21.11.05)

Grenzwerte

1. Grenzwerte von ZF

1.1. Erläutern Sie die Definition des Grenzwertes von ZF.

1.2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (3+\frac{1}{n})$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} ((n^2 - 3n) : (2n^2 - 1))$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} ((n + n^2 - 3n^3) : (n^3 + 1))$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} ((n^4) : (20n^3 + 300n^2))$

2. Grenzwerte von Funktionen

2.1.Berechnen Sie folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz. Erläutern Sie in jedem Fall den mathematischen Sachverhalt.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} ((x + 1)^2 : (x^2 - 1))$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} ((x + 1)^2 : (x^2 - 1))$ c) $\lim\limits_{x \to 0} ((x + 1)^2 : (x^2 - 1))$

d) $\lim\limits_{x \to -1} ((x + 1)^2 : (x^2 - 1))$ e) $\lim\limits_{x \to 1} ((x + 1)^2 : (x^2 - 1))$

2.2.Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0.

a) $\lim\limits_{x_0 \to 0} ((x^2 - 4x) : (x^3 - 5x))$ b) $\lim\limits_{x_0 \to 2} \sqrt{(x^2 - 4)}$ c) $\lim\limits_{x_0 \to 1} ((\ln x) : (x - 1))$

d) $\lim\limits_{x_0 \to -1} ((x^2 + x) : (x + 1))$ e) $\lim\limits_{x_0 \to 1} ((ax^2 - a) : (x - 1))$

3. Weitere Anwendungen der Grenzwertberechnung

3.1.Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen im Unendlichen.

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x$ b) $f(x) = (2x^3 + 4x^2 - 4) : (4x^3 + 6x + 3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{((2x^2 - x) : (1 + 8x^2))}$ d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x}$

b. w.

3.2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen im Unendlichen. Für den Fall, dass eine Asymptote existiert, ermitteln Sie deren Gleichung.

a) $f(x) = (x^2 - 1) : (x^2 + 1)$ b) $f(x) = (x^2 - 6) : (x - 3{,}5)$

c) $f(x) = (ax^4 - 1) : (1 + x^3)$ $(a \in R;\ a \neq 0)$ d) $f(x) = x - x^2 - ax^3$

3.3. Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale.

a) $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ b) $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ c) $\int_{-\infty}^{-3} (x + 2)^{-2}\,dx$

4. Teilaufgabe aus einer Prüfungsaufgabe.

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $h(x) = e^{-x}\sin(2x)$ $(x \in R;\ x \geq 0)$. Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen f und h, und zeigen Sie, dass diese Punkte Berührungspunkte beider Graphen sind. Die Ordinaten der Berührungspunkte bilden eine monoton fallende Zahlenfolge (a_n). Geben Sie für die Folge (a_n) eine explizite Bildungsvorschrift an. Berechnen Sie die Summe der Ordinaten für $n \to \infty$.

5. Untersuchen Sie, ob f(x) an der Stelle x_0 stetig ist. Begründen Sie.

a) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x_0 \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{für } x_0 > 1 \end{cases}$

6. Bestimmen Sie $t \in R$ so, dass f(x) in R stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 & \text{für } x \leq 1 \\ tx + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

4. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2005/06
Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Abgabetermin 28.11.05

1. Definieren Sie:
   a) Wann ist eine Funktion an einer Stelle x0 stetig?
   b) Wann ist eine Funktion eine stetige Funktion?
   c) Wann ist eine Funktion in einem Intervall I[a|b] mit $a,b \in R$ stetig?

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0?

3. Untersuchen Sie, ob die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist. Zeichnen Sie das Schaubild von f!

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\le 1 \\ \sqrt{x}, x>1 \end{cases}, x_0=1$$

4. Wie muß $a\in R$ gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist?

$$f(x)=\begin{cases} a-x^2, x\le 1 \\ \tan(x), x>1 \end{cases}, x_0=1$$

5. a) Weisen Sie nach, dass die Funktion f(x) stetig ist!

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+1}$$

b) Hat f Unstetigkeiten und wenn ja, an welchen Stellen?
c) Von welcher Art sind diese Unstetigkeiten? Begründen Sie!
d) Ist f im Intervall I[-2|0] stetig? Begründen Sie!

6. Zeigen Sie rechnerisch und anschaulich am Beispiel der Funktion $y=0.5x^2+1$ die Herleitung *des Differentialquotienten* an einer Stelle x_0! Erklären Sie auch den Begriff *Differenzenquotiont*. Welche Bedeutung besitzt der Differentialquotient in Naturwissenschaft und Technik?

7. Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten den Differentialqotienten an der Stelle x_0 !
   a) $f(x) = 2x^2 -3x + 1$ b) $f(x) = x^3 + 2$ c) $f(x) = \sin(x)$ d) $f(x) = e^x$

8. Bilden Sie jeweils die erste und zweite Ableitung!

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ b) $f_a(x)=\dfrac{a}{x^3}-ax^4$ c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$ d) $f(x)=\ln(x^2+3x-5)$

e) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x+1}$ f) $f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{1}{3}\sin(3x+3)$ g) $f(x)=\log_4(4x+4)^4$

9. Zeigen Sie, dass für die Funktion f(x) die nebenstehende Differentialgleichung gilt:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f(x)=\frac{1-x^4}{4x}\bullet f'(x) \qquad (x\ne 0, x^2\ne 1)$$

10. Gegeben sei die Funktion f durch

$$f(x)=\tfrac{1}{3}x^3-3x^2+8x$$

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f und skizzieren Sie f im Intervall I[-1 | 6].
b) Berechnen Sie den Anstieg von f im Punkt P(3|f(3)). Ermitteln Sie auch die Gleichung der Tangente t an f in P.
c) Welchen Winkel bildet die Tangente t mit der positiven x-Achse?
d) Die Tangente t bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.
e) In welchen Punkten hat die Funktion f den Anstieg 0?

11. Die Gleichung y=mx+4 beschreibt die Menge aller linearen Funktionen, die durch den Punkt P(0|4) gehen. Man spricht auch von einer Funktionenschar bzw., da es sich um Geraden handelt, von einer Geradenschar. (oder auch Geradenbüschel)
Die Gleichung

$$f(x)=\left(\frac{4(t-3)}{t^2-3t}\right)x+4$$

beschreibt ebenfalls eine solche Geradenschar.

a) Betrachten Sie mit dem GTR die sich für t=1; -1; 2; 5; -5 ergebenden Geraden in ein und demselben Koordinatensystem. Geben Sie die 5 Geradengleichungen an. Für welche beiden Werte t_1 und t_2 von t gibt es keine Geraden in der Schar?
b) Untersuchen Sie, ob es für $t \to t_1$ bzw. für $t \to t_2$ Grenzgeraden gibt. Geben Sie gegebenenfalls deren Gleichungen an.

12. Gegeben sei die Funktion f(x) mit der Gleichung

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\,(x\neq 1)$$

a) Berechnen Sie diejenigen Stellen x, für die $f'(x) = 1$ gilt!
b) Berechnen Sie die zweite, dritte und vierte Ableitung der Funktion f !
c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n mit n > 1 gilt:

$$f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-n-1}$$

5. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2005/06
Tangenten, Sekanten, Normalen

Abgabetermin
12.12.05

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
   a) Welchen Anstieg hat die Tangente an den Graph von f im Punkt $P(-2 \mid f(-2))$?
   b) Geben Sie eine Gleichung der Tangente an!
   c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen!
   d) Welchen Winkel bildet die Tangente mit der positiven x-Achse?
   e) An welcher Stelle hat f den Anstieg 4?

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1/x$.
   a) Berechnen Sie den Anstieg der Sekante s des Graphen von f durch die Punkte $P_1(0{,}25 \mid f(0{,}25))$ und $P_2(4 \mid f(4))$!
   b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte P_i *(i=3,4,...)* des Graphen von f, in denen der Tangentenanstieg mit dem Sekantenanstieg von s übereinstimmt!
   c) Geben Sie für die Punkte P_i jeweils eine Tangentengleichung an!

3. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen im Punkt $P_0(2{,}25 \mid f(2{,}25))$ für die Funktion f (x) mit der Gleichun

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x} + 1$$

4. a) Berechnen Sie die von 0(0|0) verschiedenen Schnittpunkte S1 und S2 des Schaubildes von $f(x) = x^3 - 2x$ mit der Normalen in 0 (0|0).
   b) Zeigen Sie: Die Tangenten in S1 und S2 sind parallel!

5. a) Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 0{,}5 - x^2$ in ein Koordinatensystem! Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Funktionen!
   b) Zeige: In einem Schnittpunkt ist die Tangente an f gleichzeitig Normale von g und umgekehrt.
   c) Es gibt noch weitere Funktionen der Form $f_t(x) = tx^2$ und $g_t(x) = 0{,}5 - sx^2$, deren Schaubilder die in b) genannte Eigenschaft haben. Welche Bedingung müssen die Zahlen t und s erfüllen, damit dies der Fall ist?

6. Gegeben sei die Funktion $f(x) = -0{,}5x - 2$. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Parabel $y=x^2+x+1$, die dem Graph von f parallel ist!

7. Weisen Sie nach, dass für die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5(x^2 + 2x + 2)$ folgende Differentialgleichung gilt: $1+(f')^2 = 2ff''$!

8. Für jede Zahl $a \in R$ ist durch $f_a(x) = x^3 + 0{,}5ax^2 + (a+1)x$ eine Funktion f_a und ein Schaubild K_a gegeben.
   a) Es gibt zwei Punkte, die auf allen Kurven K_a liegen. Gib ihre Koordinaten an.
   b) Zeige: Es gibt eine Stelle x_o, für welche die Tangenten aller Kurven K_a parallel sind. Gib x_o und die Steigung der Tangenten an.
   c) Für welche a-Werte schneidet K_a die 2. Winkelhalbierende dreimal, zweimal, einmal?
   d) Skizziere die Kurvenschar (K_{-1}, K_o, K_1, K_2 und K_3)

6. Prüfungskomplex – Mathematik 2005/06
– Integrale , Kurvendiskussion –

Termin : 03.01.2006

1. Wiederholen Sie die Begriffe „Stammfunktion“ , „unbestimmtes Integral“, „bestimmtes Integral“ und „uneigentliches Integral“! Ordnen Sie diese Begriffe den folgenden Aufgaben zu und ermitteln Sie die Integrale !

a) $\int (t^3+1) \cdot t^2 \; dt$ b) $\int -(3x\sqrt{x})^{-1} \, dx$ c) $\int \frac{3x}{6x^2-8x} \, dx$

d) $\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{2x+5} \quad dx$ e) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \quad dx$ f) $\int_{0}^{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} + 1) \, dx$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x}} \, dx$ h) $\int x \cdot \sqrt{1+x^2} \; dx$ i) $\int_{-1}^{-\infty} 4x^{-5} \; dx$ j) $\int_{0}^{2} (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \, dx$

k) $\int_{1}^{a} \frac{1}{3x-1} \, dx = 0{,}1$; ges. a

l) Zeige, dass für jedes a die Funktion F_a eine Stammfunktion von f_a ist :

$$F_a(x) = (a+x) \cdot \ln(a+x) + (a-x) \cdot \ln(a-x)$$
$$(a \in R+, x \in D_{fa})$$
$$f_a(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$$

2) Für welchen Wert von t mit $t > 1$ wird der Inhalt der Fläche , die der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = (1 - t) x^2 - tx$ und die x – Achse einschließen , minimal ? Geben Sie den minimalen Inhalt an !

3) Welche Parabel K : $y = c - x^2$ ($c > 0$) schließt mit der x- Achse eine 2 FE große Fläche ein ?

4) Der Graph der Funktion f_k mit $f_k(x) = k\sqrt{x} - 3x$ und die x – Achse begrenzen eine Fläche.
   a) Berechnen Sie den Inhalt. Für welchen Wert von k ergibt sich der Inhalt 8 FE ?
   b) Die Fläche mit 8 FE rotiert um die x – Achse . Welchen Rauminhalt hat der entstehende Rotationskörper ?

5) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = (\frac{x}{t} + 1) \cdot e^{t-x}$; $x \varepsilon R$.
   a) Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und der Ableitungsfunktion f_1' im Bereich [-1 ; 4] in ein gemeinsames Koordinatensystem. (LE 1cm)
   b) Zeigen Sie , dass für jedes $t > 0$ das Schaubild von f_t mit dem Schaubild von f_t' genau einen Punkt gemeinsam hat .
   c) Die Graphen von f_t und f_t' schneiden aus der Geraden g : $x = 1$ eine Strecke aus . Für welchen Wert von t ist die Länge dieser Strecke am kleinsten ?
   d) Das Schaubild K_1 , die x –Achse und die Gerade g : $x = u$ mit $u > -1$ schließen eine Fläche ein . Berechnen Sie deren Inhalt A(u) und $\lim_{u \to \infty} A(u)$.

b.w

6) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 2$) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = \frac{(x-1)^2 (x+4)}{(x+a)(x+2)} \quad (x \in D_{f_a}).$$

a) Ermitteln Sie für die Funktionen f_a den größtmöglichen Definitionsbereich. Untersuchen Sie die Funktionen f_a für die Fälle $a = 4$ und $a \neq 4$ auf Nullstellen und Polstellen. Geben Sie diese an.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f_4 durch die Gleichung

$$y = f_4(x) = x - 4 + \frac{9}{x+2} \quad (x \in D_{f_4})$$ beschrieben werden kann.

Ermitteln Sie eine Gleichung einer Stammfunktion der Funktion f_4.
Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_4, für die $F_4(-1) = 9$ gilt.
Der Graph der Funktion f_4, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Ermitteln Sie die Polstellen der Funktion f_3.
Begründen Sie ohne Verwendung von Ableitungen, dass die Funktion f_3 im Intervall $-3<x<-2$ eine lokale Maximumstelle besitzen muss.

d) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $y = g(x) = x - 3$ Asymptote des Graphen der Funktion f_3 ist.
Jede Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) schneidet den Graphen der Funktion f_3 im Punkt P_U und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_U. Für jedes u bilden die Punkte $R(0; -3)$, P_U und Q_U ein Dreieck.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von u.

Es existiert genau ein Wert u so, dass der Inhalt dieses Dreiecks maximal wird. Geben Sie diesen Wert u an.

e) Die Funktion p ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Sie hat an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ dieselben Funktionswerte wie die Funktion f_3 und an der Stelle x_1 den Anstieg -13.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p.
Der Graph der Funktion p schließt im 1. Quadranten mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

7) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{4x}{3x^2-12}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Stammfunktion der Funktion f. Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen

$x = 2{,}5$ und $x = b$ ($b \in \mathbb{R}$, $b > 2{,}5$) begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die irrationale Zahl b, für die der Inhalt der zugehörigen Fläche $\ln(\sqrt[3]{16})$ beträgt.

Es existieren Geraden g, die den Graphen der Funktion f außer im Koordinatenursprung O noch jeweils in genau zwei weiteren Punkten S_1 und S_2 schneiden.

c) Bestimmen Sie alle möglichen Werte des Anstiegs der Geraden g.

d) Betrachtet werden nun die Punkte $S_1(x_1; y_1)$ mit $(x_1<-2)$ und $S_2(x_2; y_2)$ mit $(x_2>2)$. Für genau eine der Geraden g ist der Abstand dieser Punkte minimal. Geben Sie den Anstieg dieser Geraden an.

1. Bilden Sie jeweils die 1. und 2.Ableitung und eine dazugehörige Stammfunktion (einschließlich Probe durch deren Ableitung).

a) $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}(1+x)$ *b)* $f_k(x)=x^k e^{-x}$ *c)* $f_t(x)=(x+\frac{1}{t})e^{-tx}$

d) $f_a(x)=\frac{1}{x}\ln(ax)^2$ *e)* $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{2x+2}$

2.

Gegeben sind Funktionen f_a durch $y=f_a(x)=4x\,e^{-ax^2}$ $(x \in R;\ a \in R,\ a>0)$.

a) Zeigen Sie, dass jede der Funktionen f_a genau eine Nullstelle besitzt, und begründen Sie, dass diese von a unabhängig ist!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von f_a, und bestimmen Sie die Art der Extrema!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktionen f_a Wendepunkte besitzen, und ermitteln Sie deren Koordinaten!

d) Berechnen Sie für $a_1=\frac{1}{18}$ und für $a_2=\frac{1}{8}$ jeweils die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die der Wendepunkte.
Skizzieren Sie die zugehörigen Graphen der Funktionen f_{a1} und f_{a2} in einem gemeinsamen Koordinatensystem!

e) Für jedes a existiert genau eine Tangente t_a, die den Graph der zugehörigen Funktion f_a im Punkt $P_0(2;\ y_0)$ berührt.
Stellen Sie eine Gleichung für diese Tangente t_a auf!
Ermitteln Sie den Wert von a für den Fall, dass t_a die x-Achse an der Stelle -1 schneidet!

f) Die lokalen Extrempunkte aller Graphen von f_a liegen auf der Geraden g, die Wendepunkte aller Graphen von f_a auf der Geraden h.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g und h!

Termin:23.01.2006

8. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2005/06
Kurvenuntersuchungen

Abgabetermin 06.02.06

Aufgabe Analysis aus dem Pflichtteil

Für jedes a ($a \in R$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch

$y = f_a(x) = (a^2 + 1)(\sin ax + \cos ax)$ ($x \in R$; $0 \le x \le 2\pi a^{-1}$) gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion f_2 die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte, die Art der Extrema, die Koordinaten der Wendepunkte und den Wertebereich an. Ermitteln Sie den maximalen Anstieg dieser Funktion.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 6

b) Geben Sie eine Gleichung der Normalen n an den Graphen der Funktion $f_{0,5}$ im Schnittpunkt mit der y – Achse an. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f_{0,5}$, der x-Achse und der Geraden n im I.Quadranten eingeschlossen wird.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 5

c) Für jedes a ($a \in R$, $a > 0$) existiert eine Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Schnittpunkt mit der y-Achse. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente t_a. Bestimmen Sie a so, dass der Anstieg der zugehörigen Tangente t_a den Wert 2 hat. Geben Sie eine Gleichung der speziellen Tangente an.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 5

Für jedes a wird durch die Koordinatenachsen und den Graphen der Funktion f_a im I.Quadranten eine Fläche vollständig begrenzt.

d) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 4

e) Weisen Sie nach, dass es genau ein a gibt, für das der Inhalt dieser Fläche extrem ist. Ermitteln Sie die Art des Extremums und geben Sie für diesen Fall den Flächeninhalt an.

Erreichbare Bewertungseinheiten : 5

Aufgabe Analysis aus dem Wahlteil

Gegeben sind die Funktionen $y = f_a(x) = a^2x - \ln x$ ($a \in R$, $a > 0$, $x \in R$, $x > 0$)

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graphen alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion gibt, die genau eine Nullstelle besitzt. Ermitteln Sie diese Nullstelle.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Für jedes a existiert eine Tangente t_a an den Graph der Funktion f_a, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Der Koordinatenursprung, der Berührungspunkt $B_a(x_{Ba}; f(x_{Ba}))$ dieser Tangente mit dem Graphen der Funktion f_a und der Punkt $P_a(x_{Ba}; 0)$ bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie den Wert a, für den das zugehörige Dreieck den Flächeninhalt 5 besitzt.

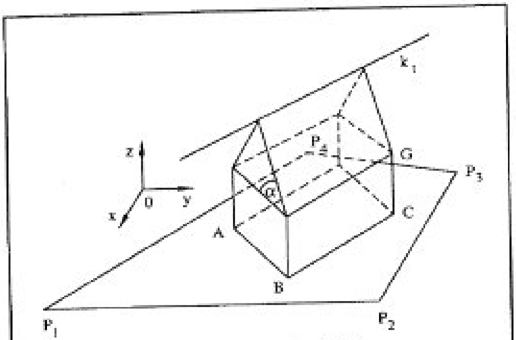
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Fachbereich Mathematik
Bernhard von Cotta – Gymnasium Brand - Erbisdorf

9. Prüfungskomplex
- Analytische Geometrie -

Termin : 27.02.2006

Familie Baumann hat sich ein Grundstück gekauft und möchte darauf ein Eigenheim errichten. Das ebene, viereckige Grundstück wird durch die Grenzsteine
P_1 (25; 0; 0), P_2 (x_2; y_2; 0), P_3 (–2; 36; 0) und P_4 (–5; 15; 0) markiert (1 LE ≙ 1 m).
Die Grenzsteine P_2 und P_4 liegen achsensymmetrisch zur Diagonale $\overline{P_1P_3}$.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Standortkoordinaten des Grenzsteines P_2.
Welchen Grundstückspreis mußte Familie Baumann bezahlen, wenn der Quadratmeterpreis des erschlossenen Grundstücks 73 DM beträgt? (6 BE)

Das Eigenheim kann als Quader mit einem aufgesetzten, dreiseitigen, geraden Prisma angenommen werden. Der Punkt C(4; 33; 0) ist ein Eckpunkt der Fundamentplatte. Jedes Haus des gewählten Typs hat eine Breite $\overline{AB}$ = 10 m und eine Länge $\overline{BC}$ = 15 m.
Die beiden Rechtecke des Daches liegen in Ebenen

E_t: $3tx + 4ty + 25z = 144t + 200$ bzw.
F_t: $3tx + 4ty - 25z = 94t - 200$ ($t \in \mathbb{R}; t > 0$).

Der Dachneigungswinkel α wird durch den Parameter t beeinflußt (siehe Skizze).

b) Zeigen Sie, daß die Seitenwandhöhe $\overline{CG}$ jedes solchen Hauses von der Wahl des Parameters t unabhängig ist, und berechnen Sie diese. (3 BE)

c) In einer speziellen Ausführung des Projektes liegen die Dachflächen in den Ebenen E_5 bzw. F_5.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Dachfirstgeraden k_5.
Weisen Sie nach, daß die Dachebenen E_5 und F_5 orthogonal zueinander sind.
Für die Finanzierung des Hauses wird der umbaute Raum (Gesamtvolumen des Hauses ohne Berücksichtigung der Wandstärken) benötigt.
Berechnen Sie für dieses spezielle Projekt den umbauten Raum. (5 BE)

d) Um den umbauten Raum zu verkleinern, soll der Dachneigungswinkel α verringert werden. Als Auflage vom Bauamt muß dieser Winkel zwischen einschließlich 30° und 45° liegen.
Berechnen Sie für diese Bedingungen das Intervall der möglichen Parameterwerte von t. (3 BE)

e) Zum Bau des Hauses wird ein Turmdrehkran mit horizontalem Ausleger verwendet. Der Kran soll so aufgestellt werden, daß die Grenzsteine P_1, P_3 und P_4 gleichweit vom Standort des Kranes entfernt sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Kranstandortes und die erforderliche Auslegerlänge.
Überprüfen Sie, ob durch solch einen Kran bei dieser Aufstellung das gesamte Grundstück erreicht werden kann. (3 BE)

(20 BE)