Lösungen

1. geg.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}$

ges.: Parameter b, falls $E \parallel g$ oder $E \times g$

Lös.: E in Koordinatenform umwandeln:

CP: Main: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & b \\ y-5 & 2 & 0 \\ z-5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\det(|..|) = 0$

$\Rightarrow \underline{2x - y - 2bz = -10b - 3}$

g in E einsetzen:

$$\begin{aligned} 2\cdot(2+r) - (4r) - 2b(8+3r) &= -10b - 3 \\ 4 + 2r - 4r - 16b - 6br &= -10b - 3 \\ -2r - 6br &= 6b - 7 \\ r(-2-6b) &= 6b - 7 \\ r &= \frac{6b-7}{-6b-2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ I) falls $(6b-7) \neq 0 \wedge (-6b-2) = 0$: $g \parallel E$

II) falls $(6b-7)$ beliebig $\wedge$ $(-6b-2) \neq 0$; $g \times E$

$\Rightarrow$ I) $\underline{\underline{b = -\frac{1}{3}}}$ II) $\underline{\underline{b \neq -\frac{1}{3}}}$

---

2. geg.: $E(P, Q, R)$ in Parameterform aufstellen und daraus Koordinatenform herstellen:

$\Rightarrow 11x - 3y - z = 26$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; a ist Parameter, $a \in \mathbb{R}$

ges.: Lage, Lös.: g in E einsetzen:

$11(2+ar) - 3(1+r) - (5+r) = 26 \Rightarrow r = \frac{12}{11a-4}$

Lös.: für $\underline{a = \frac{4}{11}}$ gilt: $\underline{E \parallel g}$ / für $\underline{a \neq \frac{4}{11}}$ gilt: $\underline{E \times g}$

②

3. $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$; $h_{b,c}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ c \end{pmatrix}$

Lös: $g \parallel h \lor g \equiv h$

① falls $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2t \\ 1 = ct \end{matrix} \Rightarrow t = \frac{1}{c} \nearrow a = -\frac{2}{c}$

oder

$\underline{\underline{ac = -2}}$

② und $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ Punktprobe

$\Rightarrow \begin{matrix} 0 = -1 + ra \\ b = 3 + r \end{matrix} \Rightarrow r = b-3 \nearrow \begin{matrix} 0 = -1 + (b-3)a \\ 0 = -1 + a(b-3) \end{matrix}$

oder

$\underline{\underline{a(b-3) = 1}}$

$\Rightarrow$ für $g \parallel h$ gilt also: $ac = -2 \land a(b-3) \neq 1$

für $g \equiv h$: $ac = -2 \land a(b-3) = 1$

Lös.: $g \times h$

falls $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \neq t\begin{pmatrix} -2 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{ac \neq -2}}$

---

4. $g_{a,b}: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$

Lös.: $g \parallel h$, $g \equiv h$

① falls $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = -3 \nearrow \underline{\underline{c = -\frac{1}{3} \land b = -6 \land a \in \mathbb{R}}}$

② und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Punktprobe

$$\left.\begin{matrix} 1 = a + br \\ 2 = -1 + r & \Rightarrow r = 3 \\ 1 = 3r & \Rightarrow r = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} ↯ \quad \underline{\underline{g \not\equiv h}}$$

$\Rightarrow$ für $g \parallel h$ gilt also $c = -\frac{1}{3} \land b = -6 \land a \in \mathbb{R}$

$g \equiv h$ ist nicht möglich

Lös: $g \times h$, $g \,w\, h$

Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \text{I}\quad & a + br = 1 + 2s \\ \text{II}\quad & -1 + r = 2 + cs \\ \text{III}\quad & 3r = 1 - s \end{aligned} \Big\} \downarrow$$

III': $s = 1 - 3r$ in II

$$\begin{aligned} \text{II}': \quad -1 + r &= 2 + c(1-3r) \\ r &= 3 + c(1-3r) \\ r &= 3 + c - 3cr \\ r + 3cr &= 3 + c \\ r(1+3c) &= 3 + c \\ r &= \frac{3+c}{1+3c} \end{aligned}$$

in III': $s = 1 - 3\,\frac{3+c}{1+3c}$ } in I

$$\Rightarrow \text{I}': \quad a + b\,\frac{3+c}{1+3c} = 1 + 2\left(1 - 3\,\frac{3+c}{1+3c}\right)$$

$$\text{"} \quad = 3 - 6\,\frac{3+c}{1+3c} \quad \Big| \cdot (1+3c)$$

$$a(1+3c) + b(3+c) = 3(1+3c) - 6(3+c)$$

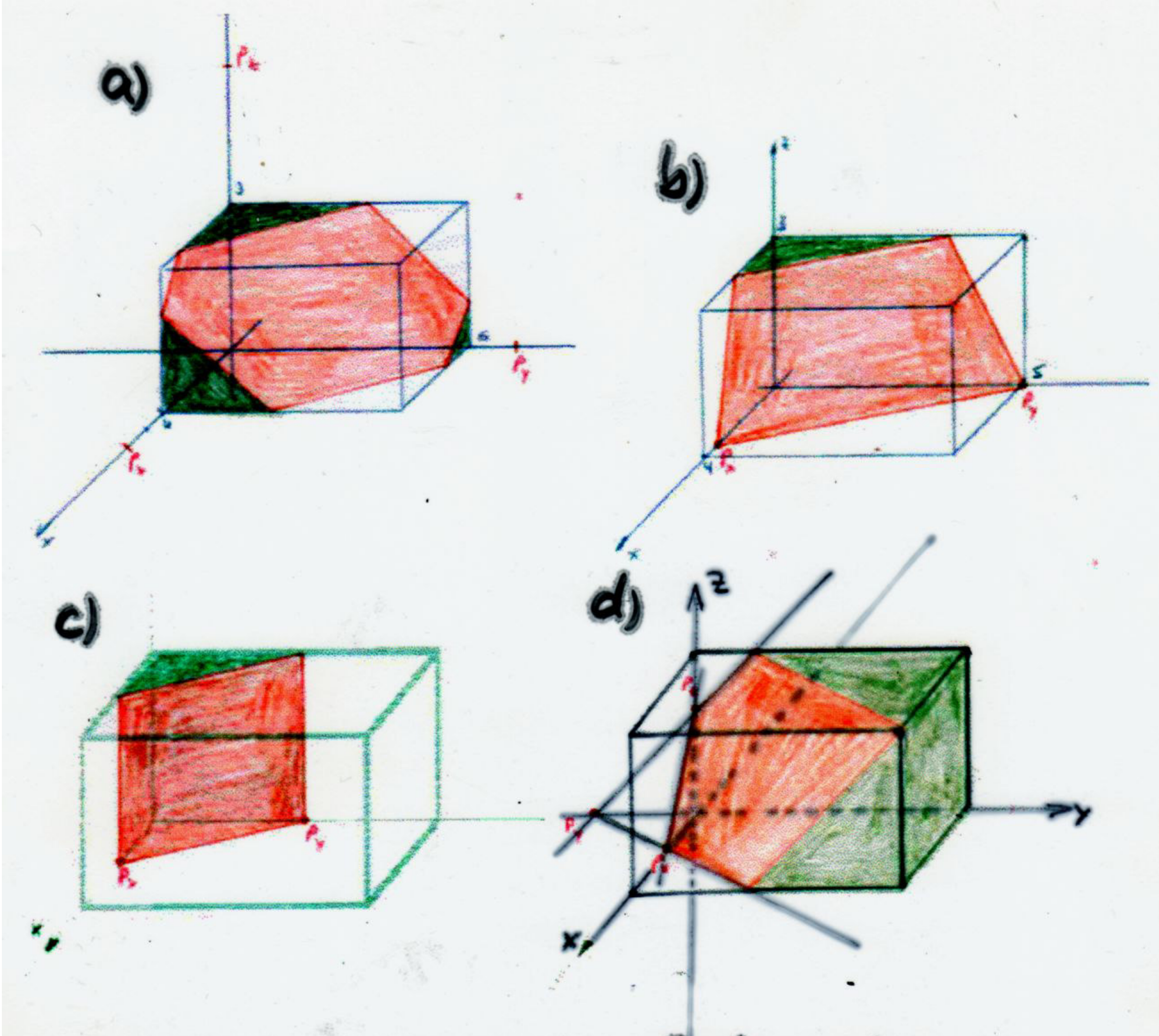
$\Rightarrow$ falls $c \neq -\frac{1}{3} \vee b \neq -6$

und Bedingung (*) ist erfüllt, folgt $g \times h$

$\Rightarrow$ falls $c \neq -\frac{1}{3} \vee b \neq -6$

und Bedingung (*) ist nicht erfüllt, folgt $g \,w\, h$

Aufgabe 5



a) $P_x(6|0|0)$; $P_y(0|6|0)$; $P_z(0|0|6)$

b) $P_x(\frac{10}{3}|0|0)$; $P_y(0|5|0)$; $P_z(0|0|-10)$

c) $P_x(2|0|0)$; $P_y(0|\frac{8}{3}|0)$

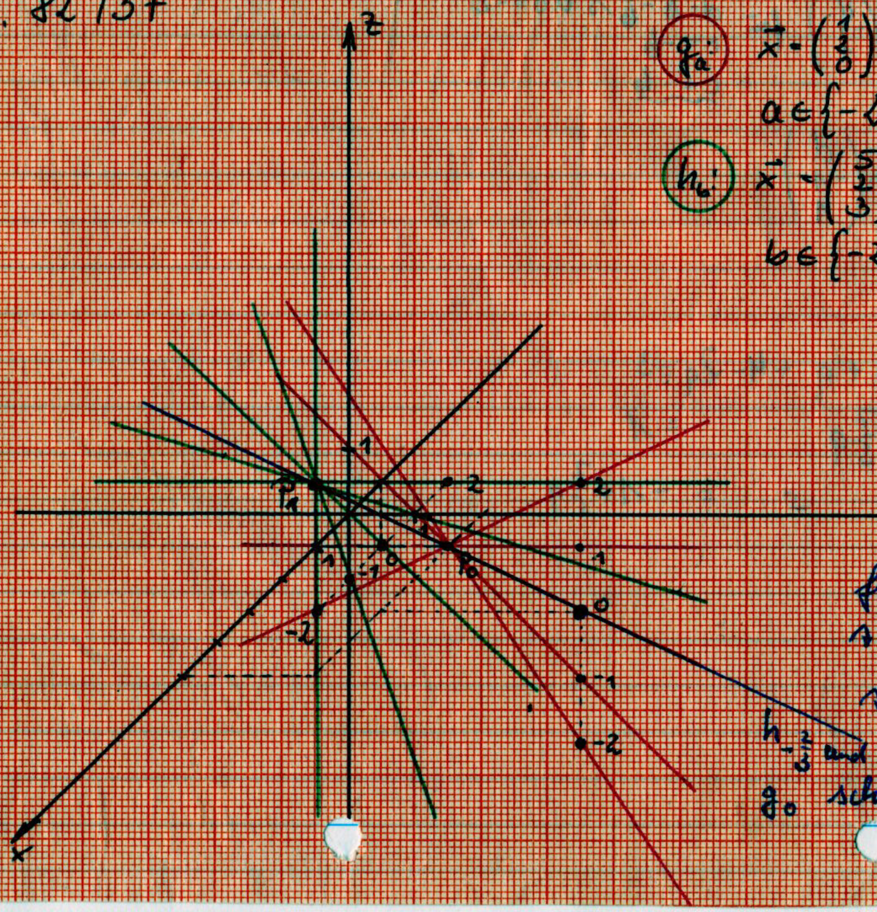
d) $P_x(2|0|0)$; $P_y(0|-2|0)$; $P_z(0|0|2)$

$E: x - y + z = 2$

bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

S. 82/137



g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$, $a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

h_b: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}b\\1\\-1\end{pmatrix}$, $b \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

für $a=0 \Rightarrow S(3|5|0)$

$\Rightarrow h_b\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}b\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} = \ldots \Rightarrow s=3,\ \underline{b=-\frac{2}{3}}$

$h_{-\frac{2}{3}}$ und g_0 schneiden sich in $S(3|5|0)$

$g_a \times h_b$: gleichsetzen:

I $1 + 2r = 5 + bs$

II $2 + 3r = 2 + s$

III $ar = 3 - s \Rightarrow s = 3 - ar$

$\Rightarrow \underline{r = \frac{3}{3+a}}$ in I einsetzen

$\Rightarrow \underline{0 = 6 + 4a + 9b}$; r in g einsetzen $\Rightarrow S\left(\frac{9+a}{3+a} \middle| \frac{15+2a}{3+a} \middle| \frac{3a}{3+a}\right)$

7. geg.: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\17\\6\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$

ges.: Lage E_1, E_2

Lös.: Koordinatengleichungen herstellen

$E_1: \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-5 & 1 & 1 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $E_2: \begin{vmatrix} x-7 & 3 & 2 \\ y-17 & 5 & 5 \\ z-6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \underline{-3x + 2y - z = 7}$

$\Leftrightarrow 15x - 10y + 5z = -35 \quad | :5$

$\Leftrightarrow 3x - 2y + z = -7 \quad | \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \underline{-3x + 2y - z = 7}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{E_1 \equiv E_2}}$