Hausaufgaben metrische Geometrie – 19.12.2017

S. 267

9) Lage der Normalenvektoren untersuchen:

$E_1 \perp E_2$, $E_1 \perp E_6$, $E_2 \perp E_4$, $E_3 \perp E_4$, $E_4 \perp E_5$

$E_4 \perp E_6$, $E_2 \parallel E_6$, $E_3 \parallel E_5$

10) a) $M_{SC}(1{,}5/4{,}5/3)$; $M_{SB}(4{,}5/4{,}5/3)$

E_{BCS} aufstellen: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}}_{\vec{OB}} + r\underbrace{\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{BC}} + s\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix}}_{\vec{BS}}$

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{BC} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix}0\\36\\18\end{pmatrix}$ bzw $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

CP: crossP$\left(\begin{bmatrix}-6\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-3\\6\end{bmatrix}\right)$

$\Rightarrow E(M_{SC}, \vec{M_{SC}M_{SB}}, \vec{n})$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}5\\4{,}5\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

bzw. $-2y + 4z = 3$

b) $F: -2x + 4z = 3$

c) $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

11) geg.: $E_k: (2k-1)x + y + kz = 1$; $k \in R$

ges.: a) $E_k \perp x$-Achse $\Rightarrow \vec{n}_{E_k} \neq r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}_k = \begin{pmatrix}2k-1\\1\\k\end{pmatrix} \neq r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2k-1 &= r \\ 1 &= 0 \rightarrow \lightning \Rightarrow E_k \not\perp x\text{-Achse} \\ k &= 0 \end{aligned}$$

b) $E_k \parallel x$-Achse $\Rightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow (2k-1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

S. 275

3) Die Punkte A, B, C haben alle den gleichen y-Koordinatenwert, d.h. die Ebene E(A, B, C) liegt parallel zur xz-Ebene. Damit beträgt der Abstand vom Punkt P(5|15|9):

$$15 - 2 = \underline{\underline{13\,LE}}$$

4) geg.: A(3|3|2); B(5|3|0); C(3|5|0)

a) Δ ABC sei gleichseitig; Fläche des Δ: F

Zeigen: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$ (Beträge ber.!)

Berechnen: $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ $\quad \nearrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ od. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} \vec{i} & 2 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 2 \\ \vec{k} & -2 & -2 \end{matrix} \right\| \qquad \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 16} = \underline{\underline{2\sqrt{3}\,FE}}$$

b) $g(0F) \times E(ABC)$ in F
$F\left(\frac{8}{3} \middle| \frac{8}{3} \middle| \frac{8}{3}\right)$; $d^* = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

c) $V = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}\,VE$

S. 276

7) geg.: $d^*(A,E) = 5$; $A(3|y_A|0)$; $E: 2x + y - 2z = 4$

a) ges.: y_A

Lös.: Da E in Koordinatenform vorliegt, kann man die Koordinatenform der Abstandsformel anwenden.

$$d^*(A,E) = \left| \frac{a x_A + b y_A + c z_A - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$d^*(A,E) = \left| \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot y_A - 2 \cdot 0 - 4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = 5$$

$$\left| \frac{2 + y_A}{3} \right| = 5$$

Fall 1: $\frac{2 + y_A}{3} = 5$ $\qquad$ Fall 2: $-\frac{2 + y_A}{3} = 5$

$\underline{\underline{y_{A_1} = 13}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{y_{A_2} = -17}}$

b) Analog!; $y_{A_1} = -\frac{45}{4}$; $y_{A_2} = \frac{5}{4}$

S. 276

8a) geg.: $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

ges.: Nachweis für $E \parallel F$: $\vec{n}_E = r\,\vec{n}_F$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \checkmark \wedge E \parallel F$$

Abstand $d^*(E, F)$ zurückführen auf Abstand $d^*(R, F)$ mit $R \in E$; $R(2|3|1)$

$$\wedge\ d^*(P_0, F) = \left|(\vec{r} - \vec{x}_0) \circ \vec{n}_0\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 2-6 \\ 3-(-5) \\ 1-0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot (8 + 16 - 2) = \underline{\underline{\frac{22}{\sqrt{12}}}} = \underline{\underline{\frac{11}{\sqrt{3}}\ LE}}$$

---

10) geg.: $P(2r+3s \mid r-2s \mid 4r-s)$

$E: x + 2y - z = 6$

ges.: $d^*(P, E)$

Lös.:

$$d^*(P, E) = \left|\frac{1\cdot(2r+3s)+2(r-2s)-1\cdot(4r-s)-6}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{2r+3s+2r-4s-4r+s-6}{\sqrt{6}}\right|$$

$$= \left|\frac{-6}{\sqrt{6}}\right| = \underline{\underline{\sqrt{6}\ LE}}$$

S. 276

11) geg.: $M(\frac{1}{2}|r|r)$; $E(A,B,C,D)$

ges.: $d=2r$ des Balls

Lös.: Ebenengleichung herstellen:

aus $A(1|0|1)$; $D(0|0|1)$; $C(0|y_c|0)$

folgt die Ebenengl. in der 3 Punkte-Form!

NR.: $y_c = \sqrt{2{,}6^2 - 1^2}$ (Pythagoras)

$\underline{y_c = 2{,}4}$ $\curvearrowright$ $C(0|2{,}4|0)$

$$\curvearrowright E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & -1 \\ \vec{j} & 0 & 2{,}4 \\ \vec{k} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} \curvearrowright E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\curvearrowright d^*(M,E) = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ r - 0 \\ r - 1 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2{,}4)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} \right| = r$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ r \\ r-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2{,}6} \right| = r$$

$$= \left| \frac{1}{2{,}6} \cdot (-r - 2{,}4(r-1)) \right| = r$$

$$= \left| \frac{1}{2{,}6} \cdot (-3{,}4r + 2{,}4) \right| = r$$

$\curvearrowright$ Fall 1: $\frac{1}{2{,}6}(-3{,}4r + 2{,}4) = r$ Fall 2: $-\frac{1}{2{,}6}(-3{,}4r + 2{,}4) = r$

$\curvearrowright$ $\underline{\underline{r_1 = \frac{2}{5}}}$ ($\curvearrowright$ $\underline{r_2 = 3}$) entfällt wegen Aufgabe!

S. 278

3a) geg.: $P(-1|5)$, $g: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix} = 0$

ges.: $d^*(P,g)$

Lös: Problem ist 2-dimensional!

g umformen in $y = mx + n$:

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix} = 0$$

$$-5(x-1) + 12(y-2) = 0$$

$$-5x + 5 + 12y - 24 = 0$$

$$-5x + 12y = 19$$

$$12y = 5x + 19$$

$$\curvearrowright g: \underline{\underline{y = \frac{5}{12}x + \frac{19}{12}}}$$

Senkrechte zu g durch $P \Rightarrow h$

$$\curvearrowright h: \quad y = -\frac{12}{5}x + n$$

$$P \to \quad 5 = -\frac{12}{5} \cdot (-1) + n$$

$$\frac{25}{5} = \frac{12}{5} + n \quad \curvearrowright n = \frac{13}{5}$$

$$\curvearrowright h: \underline{\underline{y = -\frac{12}{5}x + \frac{13}{5}}}$$

$$h \times g: \quad \frac{5}{12}x + \frac{19}{12} = -\frac{12}{5}x + \frac{13}{5}$$

CP: SOLVE: $x_S = \frac{61}{169} \curvearrowright \underline{\underline{S\left(\frac{61}{169} \middle| \frac{293}{169}\right)}}$

$$d^*(P,g) = |\vec{PS}| = \sqrt{\left(\frac{61}{169}+1\right)^2 + \left(\frac{293}{169}-5\right)^2} = \underline{\underline{\frac{46}{13}\,LE}}$$

3e) geg.: $P(6|7|-3)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

ges.: $d^*(P,g)$

Lös.: 1) Hilfsebene E_H: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}6\\7\\-3\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = 0$

2) $E_H \times g$ in S

3) $|\vec{PS}| = d^*(P,g) = \underline{\underline{7\,LE}}$

S. 280

3a) geg.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

ges.: $d^*(g,h)$; g und h sind windschief

Lös.:

$$\underline{d^*(g,h) = \left| (\vec{x}_0 - \vec{x}_1) \circ \vec{n}_0 \right|}$$

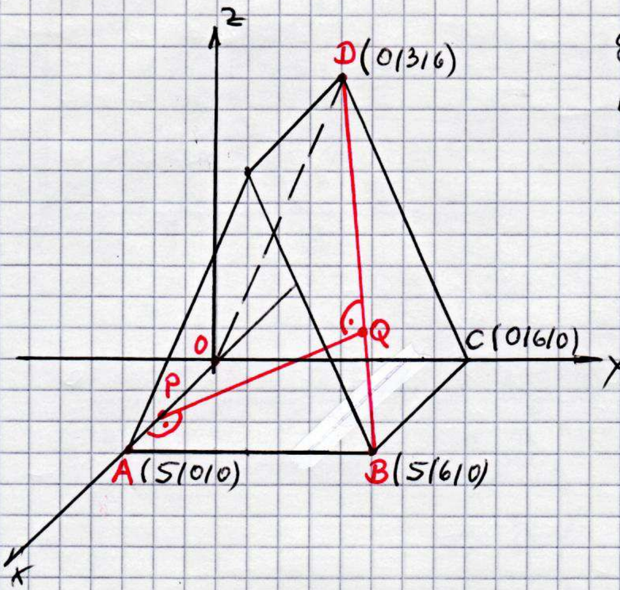
$$\text{NR: } \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 1 \\ \vec{j} & -2 & 0 \\ \vec{k} & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d^*(g,h) = \left| \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{6^2+9^2+2^2}} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \right|$$

$$= \frac{1}{11} \cdot (60 + 63 - 2) = \frac{121}{11} = \underline{\underline{11 LE}}$$

S. 280/6



ges.: P, Q ; $d^*(P,Q) = d^*(OA, BD)$

Lös.:

$$d^*(OA,BD) = \left| (\vec{x}_A - \vec{x}_B) \circ \vec{n}_0 \right|$$

$\vec{n}_0$ ist ein Normaleneinheitsvektor der parallelen Ebenen, in denen die windschiefen Geraden liegen.

$$\vec{n} = \vec{BD} \times \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -5 & 5 \\ \vec{j} & -3 & 0 \\ \vec{k} & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ bzw } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d^* = \left| \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$d^* = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\underline{d^* = \frac{12}{\sqrt{5}} \text{ LE}}$$

Fußpunkte P und Q:

geg.: $P(x_P|0|0)$; $Q(x_P|y_Q|z_Q)$ wegen $\overline{OA} \perp PQ$

ges.: $g_{PQ} \times BD$ in Q $\wedge$ OA in P

$$g_{PQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\vec{n} \quad ; \vec{n} \text{ von } E(BCD)$$

$$\vec{n} = \vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ bzw } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g_{PQ}: \underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

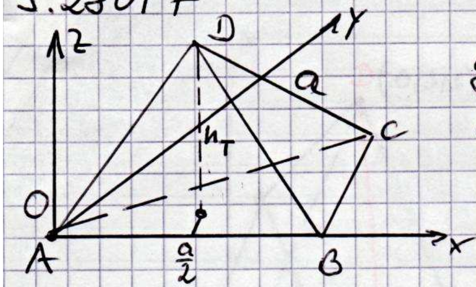
$g_{PQ} \times E(BCD)$: $E(BCD)$ mit $2y + z = 12$ (von $\vec{n}$ und B)

g_{PQ} einsetzen: $2(2t) + t = 12 \Rightarrow \underline{t = \frac{12}{5}} \Rightarrow \underline{Q\left(x_P \middle| \frac{24}{5} \middle| \frac{12}{5}\right)}$

$Q \in g_{BD}$: $\begin{pmatrix} x_P \\ \frac{24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{2}{5} \Rightarrow \underline{x_P = 3}$

$\Rightarrow Q\left(3 \middle| \frac{24}{5} \middle| \frac{12}{5}\right)$; $P(3|0|0)$

S. 280/7



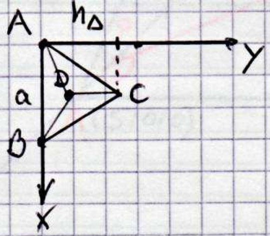
ges.: $d^*(AC, BD)$

Lös.: $A \equiv O$

$B\,(a|0|0)$

$C\,(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}\sqrt{3}|0)$

$D\,(\frac{a}{2}|\frac{a}{6}\sqrt{3}|\frac{a}{3}\sqrt{6})$



Lage D: als Schwerpunkt des Δ ABC in xy-Eb.

$$\Rightarrow D\left(\frac{0+a+\frac{a}{2}}{3}\,\middle|\,\frac{0+0+\frac{a}{2}\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{a}{2}\,\middle|\,\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)$$

$$h_T = \frac{a}{3}\sqrt{6} \quad \text{aus TW}$$

Abstandsbestimmung:

$$\vec{n} = \vec{BD} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \vec{j} & \frac{a}{6}\sqrt{3} & \frac{a}{2}\sqrt{3} \\ \vec{k} & \frac{a}{3}\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{a}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{6}\sqrt{18} \\ -\frac{a^2}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \frac{a^2}{12}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{a^2}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{a^2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 3a^2\sqrt{2} \\ a^2\sqrt{6} \\ 2a^2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$d^* = \left|(\vec{x}_B - \vec{x}_A)\circ\vec{n}_0\right| = \left|\begin{pmatrix} a-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}\circ\frac{1\cdot\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{18+6+12}}\right|$$

$$d^* = \left|\frac{1}{\sqrt{36}}\cdot\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot(3a\sqrt{2}) = \underline{\underline{\frac{a}{2}\sqrt{2}}}$$