## Aufgabe 2

Für jedes $t>0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch

$$f_t(x)=\left(\frac{x}{t}+1\right)\cdot e^{t-x};\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei $K_t$.

a) Untersuchen Sie $K_t$ auf Asymptoten, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte. (Bei der Untersuchung auf Wendepunkte kann hier auf Überprüfung einer hinreichenden Bedingung verzichtet werden.)
Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktion $f_1$ und der Ableitungsfunktion $f_1'$ im Bereich $-1\leq x\leq 4$ in ein gemeinsames Achsenkreuz ein. (LE 1 cm)

b) Zeigen Sie, daß für jedes $t>0$ das Schaubild von $f_t$ mit dem Schaubild von $f_t'$ genau einen Punkt gemeinsam hat.
Die Schaubilder von $f_t$ und $f_t'$ schneiden aus der Geraden $x=1$ eine Strecke aus.
Für welchen Wert von $t$ ist die Länge dieser Strecke am kleinsten?

c) Das Schaubild $K_1$, die x-Achse und die Gerade $x=u$ mit $u>-1$ schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt $A(u)$ und $\lim\limits_{u\to\infty} A(u)$.

d) Das Schaubild $K_t$ schneidet die x-Achse im Punkt $N_t$. Die Tangente an $K_t$ im Punkt $P_t\left(2-t\,\middle|\,\frac{2}{t}\cdot e^{2t-2}\right)$ schneidet die x-Achse im Punkt $R_t$.
Zeigen Sie, daß das Dreieck $N_tR_tP_t$ gleichschenklig ist.
Welche Beziehung muß $t$ erfüllen, damit das Dreieck $N_tR_tP_t$ rechtwinklig ist?
Zeigen Sie, daß für $t=1$ diese Bedingung erfüllt ist.

Nr. 2)

a) Asymptoten

keine senkrechte Asymptote

waagerechte A: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{t}+1\right) \cdot e^{t-x} = 0$ $(t>0)$

$\Downarrow$

$y = 0$ ist waag. Asymptote

NST $x_N = -t$

Extrema: $f_t'(x) = e^{t-x}\left(\frac{1}{t} - \frac{x}{t} - 1\right)$

n. Kr. $0 = f_t'(x)$

$x_E = 1-t$

$f_t''(x) = -e^{t-x}\left(\frac{2}{t} - 1 - \frac{x}{t}\right)$

h. Kr. $f_t''(1-t) = -e^{2t-1}\left(\frac{2}{t} - 1 - \frac{1-t}{t}\right)$

$= -e^{2t-1} \cdot \frac{1}{t} < 0$ $\curvearrowright$ lok. Max.

$H\left(1-t \,\middle|\, \frac{1}{t}e^{2t-1}\right)$

Wendepunkt:

n. Kr. $0 = f_t''(x)$

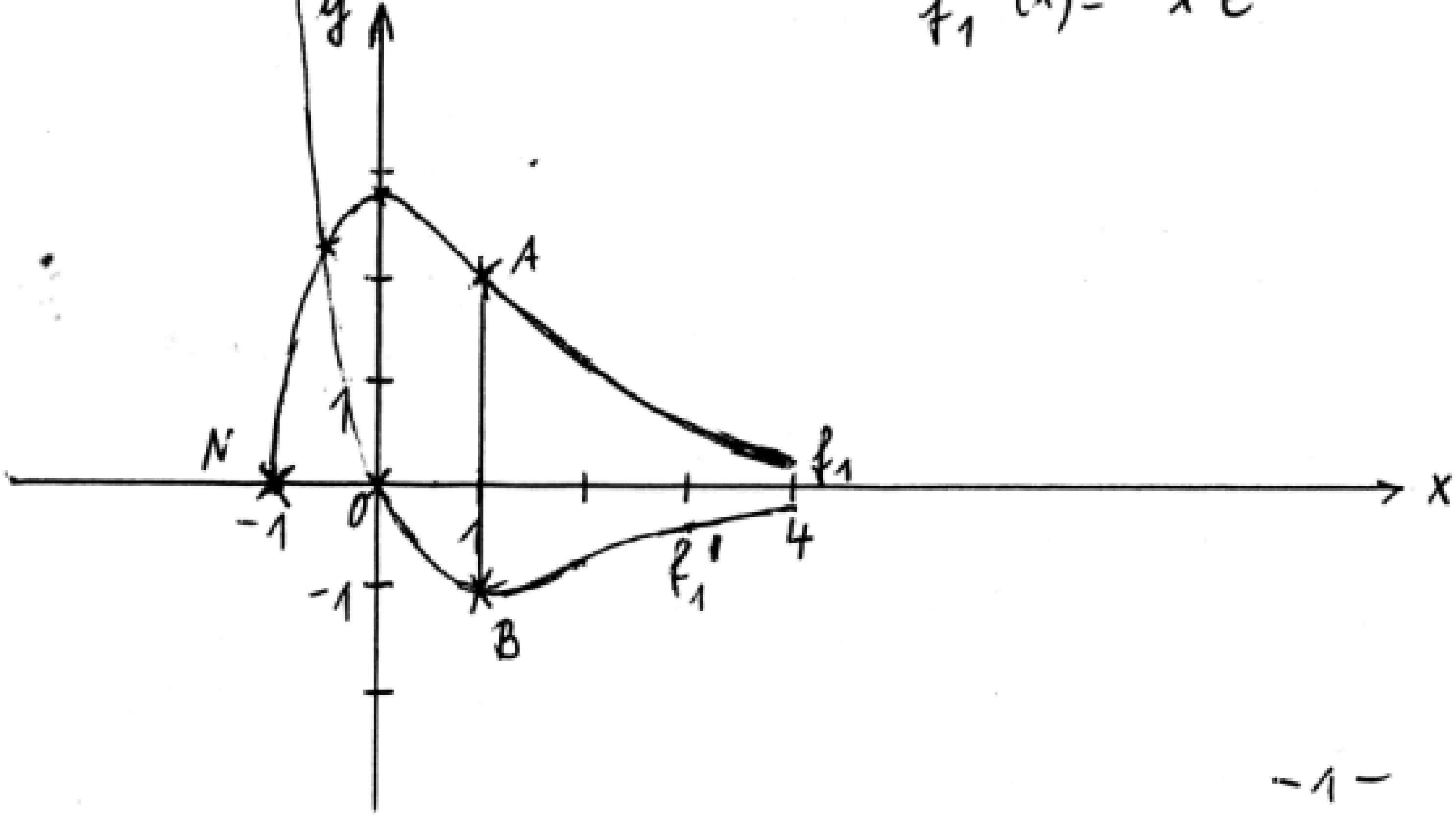
$x_W = 2-t$ (Verzicht auf Nachweis!)

$W\left(2-t \,\middle|\, \frac{2}{t}e^{2t-2}\right)$

Graphen von $f_1$ und $f_1'$

$f_1(x) = (x+1)\,e^{1-x}$

$f_1'(x) = -x\,e^{1-x}$



b)

$$f_t(x) = f_t'(x)$$

$$\left(\frac{x}{t}+1\right) e^{t-x} = e^{t-x}\left(\frac{1}{t} - \frac{x}{t} - 1\right)$$

$$e^{t-x}\left(\frac{x}{t}+1-\frac{1}{t}+\frac{x}{t}+1\right) = 0$$

$$\frac{2x}{t} - \frac{1}{t} + 2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} - t}}$$

$$\underline{\underline{S_t\left(\frac{1}{2}-t \;\middle|\; \frac{1}{2t}\cdot e^{2t-\frac{1}{2}}\right)}}$$

Extremwertaufgabe:

HB: $\overline{AB} = d$ maximal

NB: $A(1 \mid f_t(1))$, $B(1 \mid f_t'(1))$

ZF: $d_t(1) = f_t(1) - f_t'(1)$

$$f_t(1) = \left(\frac{1}{t}+1\right)\cdot e^{t-1}$$

$$f_t'(1) = e^{t-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t}-1\right) = -e^{t-1}$$

$$d(t) = e^{t-1}\left(\frac{1}{t}+1\right) + e^{t-1}$$

$$\underline{\underline{= e^{t-1}\cdot\left(\frac{1}{t}+2\right)}}$$

$$d'(t) = \frac{1}{t^2}\cdot e^{t-1}\cdot\left(2t^2+t-1\right)$$

n. Kr. $0 = d'(t)$

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{1}{2}}}$$

$t_2 = -1$ entfällt, da $t>0$

$$d''(t) = e^{t-1}\left(2+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right)$$

h. Kr. $d''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ $\curlyvee$ lok. Min

$\curlyvee$ Für $t = \frac{1}{2}$ ist die Strecke am kleinsten.

c)

$$\int_{-1}^{u} (x+1)\cdot e^{1-x}\,dx$$

Produktintegration:

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

setze $v = x+1 \rightarrow v' = 1$

$u' = e^{1-x} \rightarrow u = -e^{1-x}$

$$A(u) = \int_{-1}^{u} f_1(x)\,dx = \left[-e^{1-x}\cdot(x+1)\right]_{-1}^{u} - \int_{-1}^{u} -e^{1-x}\,dx$$

$$= \left[(x+1)\cdot -e^{1-x}\right]_{-1}^{u} - \left[e^{1-x}\right]_{-1}^{u}$$

$$= \left[(x+1)\cdot(-e^{1-x}) - e^{1-x}\right]_{-1}^{u}$$

$$= \left[(x+2)\cdot(-e^{1-x})\right]_{-1}^{u}$$

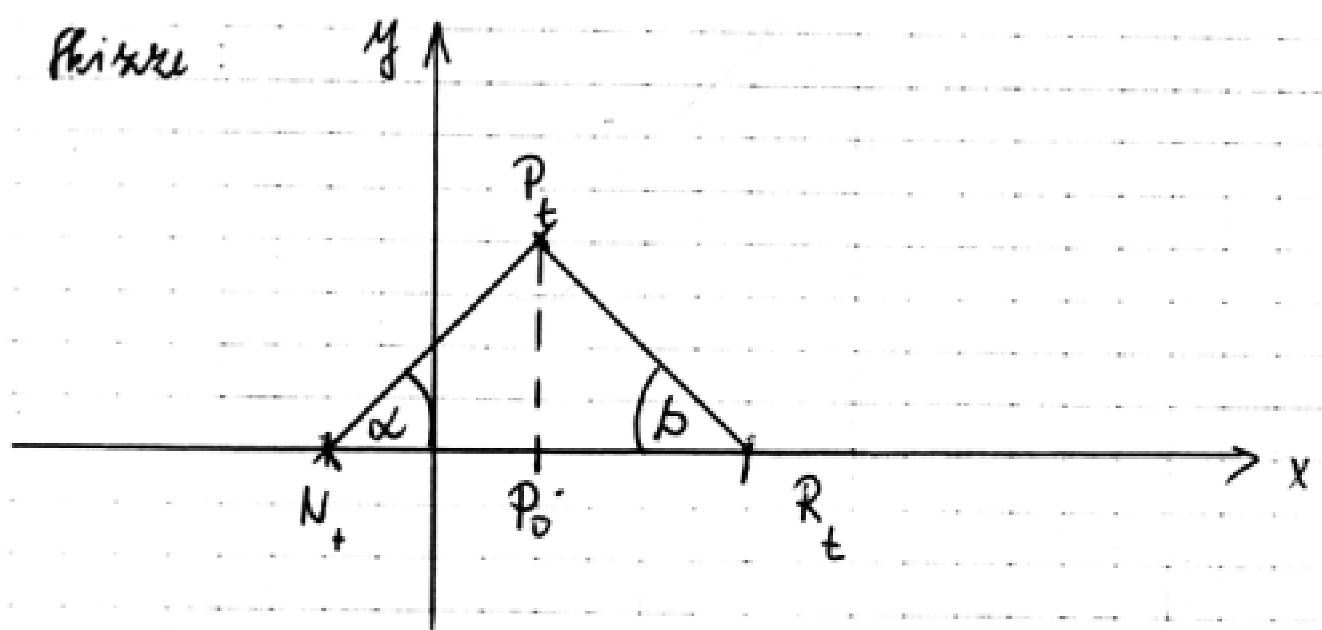
$$= e^2 + (u+2)\cdot(-e^{1-u})$$

$$= e^2 - u e^{1-u} - 2e^{1-u} = A(u)$$

$$\lim_{u\to\infty} A(u) = \lim_{u\to\infty} e^2 - 0 - 0 = \underline{\underline{e^2}}$$

---

d) Skizze:




(1) ges. $R_t \mathrel{\hat{=}}$ Nullstelle der Wendetangente

ges. Wendetangente: $m = f'(x_W) = f'(2-t) = -\frac{1}{t}\cdot e^{2t-2}$

ges. NST: $0 = y = -\frac{1}{t}\cdot e^{2t-2}\cdot x + e^{2t-2}\cdot\left(\frac{4}{t} - 1\right)$

$x_N = 4-t$ ↑ $\underline{\underline{R_t(4-t\,|\,0)}}$

(2) Nachweis der Gleichschenkligkeit :

(unterschiedl. Möglichkeiten!)

hier : es sei $\alpha = \sphericalangle\ P_t N_t R_t$ und $\beta = \sphericalangle\ N_t R_t P_t$

zu zeigen $\alpha = \beta$

$$\tan \alpha = \frac{P_t P_0}{P_0 N_t} = \frac{e^{2t-2}}{t} \qquad (*)$$

$$\tan \beta = \frac{P_t P_0}{R_t P_0} = \frac{e^{2t-2}}{t}$$

$\curvearrowright$ $\tan \alpha = \tan \beta$ und $\alpha = \beta$

$\curvearrowright$ $\Delta\ N_t P_t R_t$ ist gleichschenklig.

(3) Rechtwinkligkeit :

$g(N_t, P_t) \rightarrow m_g = \frac{1}{t}(e^{2t-2})$ siehe (*)

$h(P_t, R_t) \rightarrow m_h = -\frac{1}{t}(e^{2t-2})$

Orthogonalität, wenn $m_g = -\frac{1}{m_h}$ bzw. $m_g \cdot m_h = -1$

$$m_g \cdot m_h = -\frac{1}{t^2}(e^{2t-2})^2$$

$$\frac{1}{t^2}(e^{2t-2})^2 = 1 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\frac{1}{t}(e^{2t-2}) = \pm 1$$

$\rightarrow -1$ entfällt, da $t > 0$ und $e^{2t-2} > 0$

$$\frac{1}{t}(e^{2t-2}) = 1$$

$$e^{2t-2} = t$$

$\curvearrowright$ Die Beziehung $t = e^{2t-2}$ muß erfüllt sein.

Nachweis für $t = 1$: $e^{2-2} = e^0 = 1$.