1. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2007/08
Wiederholung Grundwissen Klassen 8/9/10

Abgabetermin 01.10.07

1. Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die auf derselben Seite von g liegen.
   a) Konstruiere einen Punkt C so auf g, dass der Winkel ACB ein rechter Winkel ist.
   b) Ist die Aufgabe für jede Lage von A, B und g lösbar? Wie viele Lösungen gibt es in den einzelnen Fällen?

2. Vereinfache die Terme!

   a) $\sqrt{x^2+9}$ b) $\sqrt{x^2\cdot 9}$ c) $\sqrt{\frac{x^2}{9}}$ d) $\sqrt{x^2-9}$

   e) $\lg(2a)-2\lg(a)+\lg(a^2)+\lg(a^{-1})$ f) $\lg(\sqrt{x})-\lg(\sqrt{4x})+\lg(0{,}5x^2)+\lg(4)$

   g) $(\sqrt{a}\sqrt{b}):(\sqrt{abc})$

   h) $\sqrt{\frac{xy^2z}{16}}\cdot\left(\sqrt{\frac{4x}{5z}}:\sqrt{\frac{5}{x}}\right)$ i) $\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{4}{9}x+\frac{4}{27}}$

   j) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$ k) $(8x^2)^{\frac{3}{2}}(8x)^2$

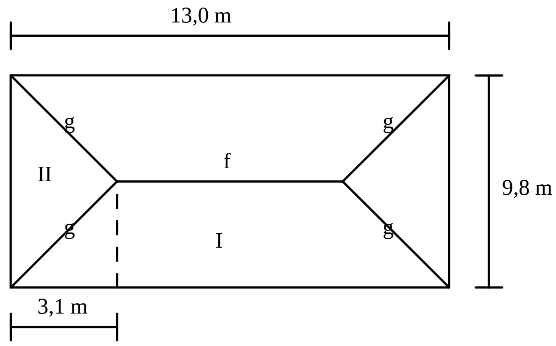
   l) $(a^{n+3}-3a^n-a^{n-3}):a^{-3}$

   m) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b}:\frac{x^4y^{-3}}{6ab^2}$ n) $\frac{p^3q^{-2}}{r^{-4}s^{-5}}:\frac{r^{-6}s^{-1}}{p^{-1}q^2}$ o) $\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}}\cdot\frac{(xy)^2}{a^3b}$

3. Führe eine Polynomdivision durch!
   a) $(x^4+2x^3+4x-1):(x^2+2)$ b) $(x^{n+2}+x^{n+1}-2x^2-2x):(x^n-2)$

4. Faktorisiere!
   a) x^2-4 b) m^6+8m^3+16 c) $4x^4+9x^2+2$ d) x^3+5x^2-6x

5. Löse folgende Gleichungen ohne GTR! Beachte bei Aufgabe e) den Definitionsbereich der Gleichung!
   a) $2^{x+1}\cdot 4^{2x-2}=8^x$ b) $10\cdot 5^{3x-1}=2\cdot 5^{x+1}$ c) $\lg(5-4x)=\lg(1+4x)$
   d) $\lg(x)=2\lg(x)+\lg(1+x)$ e) $(x^2-5x-9)^{0,5}=(4x+1)^{0,5}$



6. Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Walmdaches.
   Der First (Länge f) befindet sich 4,1 m über dem Dachboden.
   Berechne die Neigungswinkel der Flächen I und II und der Gratbalken g
   bezüglich des Dachbodens.

7. Aus einer Urne mit fünf roten und sechs weißen Kugeln werden nacheinander mit Zurücklegen drei Kugeln auf gut Glück entnommen.
   I) Entwickle ein Baumdiagramm und ermittle die Ergebnismenge dieses Zufallsexperiments.
   II) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man
      a) drei rote Kugeln zieht, b) das Ereignis {rot,weiß,rot} eintritt,
      c) genau eine rote Kugel zieht, d) höchstens zwei weiße Kugeln findet?

8. GTR-Aufgaben: Ermittle die Lösungen folgender Gleichungen.

   a) $5x+1=4^x$ b) $(17x-12)+(28x^2+1)=15x^3$ c) $\frac{3x-8}{x-2}+\frac{5x+4}{x+2}=\frac{6}{x}$

2.Prüfungskomplex Mathematik 07/08 Zahlenfolgen, Grenzwerte von Zahlenfolgen

(Abgabetermin:22.10.07)

Hinweise: Lösen Sie diese Aufgaben in einer möglichst kurzen Zeit. Wenn die Aufgabenstellung es zulässt, wenden Sie den GTR sinnvoll an.

1. Berechnen Sie.

a) $\sum_{i=1}^{7} 2^i$ b) $\sum_{k=2}^{10} (k-3)$ c) $\sum_{i=1}^{4} i^3 + \sum_{i=5}^{8} i^3 - \sum_{i=1}^{8} i^3$ d) die Summe aller ungeraden Zahlen unter 400

e) $\lim_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})$ f) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{2n^2-1}$ g) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2-3n^3}{n^3+1}$ h) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{20n^3+300n^2}$

2. Begründen Sie folgende Aussage: Eine konvergente Zahlenfolge hat höchstens einen Grenzwert

3. Eine Zahlenfolge (a_n) hat die Folge der Partialsummen (s_n) mit der Bildungsvorschrift:

$$s_n = \frac{2n}{n+1} \quad (n \in N, n > 0).$$

a) Geben Sie die Glieder s_1 bis s_5 der Folge (s_n) an.
b) Untersuchen Sie die Folge (s_n) auf Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen und Konvergenz.
c) Berechnen Sie den Grenzwert von (s_n), falls dieser existiert.
d) Wie viele Glieder der Folge (s_n) sind kleiner als 1,99?
e) Berechnen Sie die Glieder a_1 bis a_5 und a_n der Folge (a_n).

4. Untersucht werden die drei Zahlenfolgen (a_n), (b_n) und (c_n), $n \geq 1$.

a) (a_n) ist durch $a_n = \frac{3n+21}{2n-1}$ gegeben. Weisen Sie nach, dass die Zahl 2,5 kein Glied der Folge ist.

b) (b_n) ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $b_3 = a_3$ und $b_5 = a_5$. (s_n) ist die zu (b_n) gehörende Partialsummenfolge. Geben Sie eine explizite Zahlenfolge für (b_n) an.
Berechnen Sie s_1, s_2 und s_3.
Geben Sie eine Summenformel für (b_n) an.

c) (c_n) ist eine geometrische Zahlenfolge mit $q>0$ und $c_3 = a_3$ und $c_5 = a_5$. Geben Sie eine explizite Zahlenfolge für (c_n) an.

5. Teilaufgabe aus einer Prüfungsaufgabe.

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $h(x) = e^{-x} \sin(2x)$ $(x \in R; x \geq 0)$. Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen f und h, und zeigen Sie, dass diese Punkte Berührungspunkte beider Graphen sind. Die Ordinaten der Berührungspunkte bilden eine monoton fallende Zahlenfolge (a_n). Geben Sie für die Folge (a_n) eine explizite Bildungsvorschrift an. Berechnen Sie die Summe der Ordinaten für $n\to\infty$.

3. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2007/08
Grenzwerte von Funktionen / Stetigkeit / Stochastik

Abgabetermin 05.11.2007

Wiederholen Sie: Grenzwerte von Funktionen (vgl. Zahlenfolgen), Grenzwertsätze für Funktionen, Berechnung von Grenzwerten von Funktionen und ihre grafische Bedeutung sowie die drei Kriterien für die Stetigkeit von Funktionen.

1. Ermitteln Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze für Funktionen die Grenzwerte folgender Funktionen an der Stelle x_0.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2\ ;\ x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{2x + x^2}{x}\ ;\ x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}\ ;\ x_0 = 2$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}\ ;\ x_0 = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & \text{für } x < 1 \\ \lg x\ ; & \text{für } x > 1 \end{cases}\ ;\ x_0 = 1$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}\right)^3\ ;\ x_0 = -2$

2. Bestimmen Sie die Asymptote(n) für folgende Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}$

c) $f(x) = 3^{-x} \cdot 4^x$

d) $f(x) = 2^x \cdot 3^{-x}$

3. Untersuchen Sie, ob f(x) an der Stelle x_0 stetig ist. Begründen Sie.

a) $f(x) = \sqrt{x}\ ;\ x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x_0 \leq 1 \\ \sqrt{x} \text{ für } x_0 > 1 \end{cases}\ ,\ x_0 = 1$

4. Bestimmen Sie $t \in R$ so, dass f(x) in R stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 & \text{für } x \leq 1 \\ tx + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

5. a) Weisen Sie nach, dass die Funktion g im gesamten Definitionsbereich stetig ist.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases} \qquad x \in R$$

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b.w.

b) Ermitteln Sie näherungsweise

$$\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} g(x) \quad dx.$$

6.a) Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{4x - 4} \quad (x \in D_f).$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Polstelle.
Ermitteln Sie eine Gleichung der linearen Funktion, deren Graph Asymptote des Graphen der Funktion f ist.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-4 \leq x \leq 6$.

b) Der Graph der Funktion f und die Geraden mit den Gleichungen

$y = \frac{1}{4}(x+3)$, $x = 3$ und $x = z$ $(z \in R;\ z > 3)$

begrenzen für jeden Wert z jeweils eine Fläche A(z) vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A(z).
Berechnen Sie den Wert z, für den der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt.
Ermitteln Sie $\lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.

7. Frank und Steffi spielen in einer Fernsehshow. Als Sieger der Vorrunde müssen sie einen Golfball in ein 9m entferntes Golfloch spielen. Das Paar hat 4 Versuche. Gelingt es, wenigstens dreimal zu treffen, gewinnt das Paar ein Auto.

Erfahrungsgemäß weiß man: Bei jedem Versuch trifft Frank mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 und Steffi mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8.

a) Frank schlägt den Ball viermal. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
Ereignis A: Frank trifft höchstens zweimal.
Ereignis B: Er trifft erst im letzten Versuch.

b) Steffi schlägt den Ball viermal. Wie groß ist dabei die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto gewonnen wird.

c) Steffi absolviert im Training eine Reihe von Versuchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit , dass bei 10 Versuchen von Steffi mindestens ein Fehlversuch auftritt.

Wiederholungskomplex 04 **Thema: Differenzieren und Integrieren**

1. Wiederholen Sie die Begriffe:„Differenzenquotient“, „Differentialquotient“, „1.Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 “ und deren graphische Deutung, sowie „Stammfunktion einer Funktion f“ und „Unbestimmtes Integral einer Funktion f“!

---

2. Stellen Sie den Differentialquotienten an der Stelle x_0 für folgende Funktionen auf!

A) $f(x)=x^3$ B) $f(x)=e^x$ C) $f(x)=\sin x$

---

3. Untersuchen Sie die Grenzwerte für $h \longrightarrow 0$ der folgenden Terme, indem Sie für h Folgen von Zahlen einsetzen, die von „links“ bzw. „rechts“ gegen 0 streben.
Fertigen Sie kleine Wertetabellen an!

A) $\dfrac{e^h-1}{h}$ B) $\ln\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}}$ C) $\dfrac{\cosh-1}{h}$

---

4. Geben Sie diejenigen Stellen x_i $(i \in N, 1 \le i \le 5)$ $x_i \in D_f$ an, an der die Tangente an den Graph der Funktion $f_i(x)$

A) parallel zur Geraden g: $y=\dfrac{1}{3}x+1$ verläuft.

B) senkrecht zur Geraden h: $y=\dfrac{2}{5}x-1$ verläuft.

$f_1(x)=x^2+2x$ $f_2(x)=\sqrt{3x}$ $f_3(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$

$f_4(x)=e^{-2x}+x^2$ $f_5(x)=\ln(1+x^2)$

---

5. Bilden Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

$f_1(x)=x^7-ax^4+\dfrac{a}{x}$ $f_2(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ $f_3(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$f_{4(}(x)=\ln(x^2-5)$ $f_5(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{1}{3}\sin(3x+3)$

$f_6(x)=e^x x^2$ $f_7(x)=\dfrac{1}{x}+3\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$

---

6. Ermitteln Sie das unbestimmte Integral der Funktion f.
Benutzen Sie bekannte Integrationsmethoden und machen Sie die Probe!

1) $\int (x^2+ax)^2 dx$ 2) $\int \sqrt{ax+2}dx$ 3) $\int x \cdot \sin x dx$

4) $\int \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ 5) $\int \dfrac{x^3+x^2+5x+12}{x+3}dx$

Termin: 19.11.07 *Viel Spaß bei der Bearbeitung dieser Aufgaben!*

5. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2007/08
Tangenten, Sekanten, Normalen

Abgabetermin
04.12.07

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
   a) Welchen Anstieg hat die Tangente an den Graph von f im Punkt P(-2 | f(-2))?
   b) Geben Sie eine Gleichung der Tangente an!
   c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen!
   d) Welchen Winkel bildet die Tangente mit der positiven x-Achse?
   e) An welcher Stelle hat f den Anstieg 4?

2. Gegeben sei die Funktion f(x) = l/x.
   a) Berechnen Sie den Anstieg der Sekante s des Graphen von f durch die Punkte P_l(0,25 | f(0,25)) und P_2(4 | f(4))!
   b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte P_i *(i=3,4,...)* des Graphen von f, in denen der Tangentenanstieg mit dem Sekantenanstieg von s übereinstimmt!
   c) Geben Sie für die Punkte P_i jeweils eine Tangentengleichung an!

3. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen im Punkt Po(2,25 | f(2,25)) für die Funktion f (x) mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x} + 1$$

4. a) Berechnen Sie die von 0(0|0) verschiedenen Schnittpunkte Sl und S2 des Schaubildes von $f(x) = x^3 - 2x$ mit der Normalen in 0(0|0).
   b) Zeigen Sie: Die Tangenten in Sl und S2 sind parallel!

5. a) Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 0,5 - x^2$ in ein Koordinatensystem! Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Funktionen!
   b) Zeige: In einem Schnittpunkt ist die Tangente an f gleichzeitig Normale von g und umgekehrt.
   c) Es gibt noch weitere Funktionen der Form $f_t(x) = tx^2$ und $g_t(x) = 0,5 - sx^2$, deren Schaubilder die in b) genannte Eigenschaft haben. Welche Bedingung müssen die Zahlen t und s erfüllen, damit dies der Fall ist?

6. Gegeben sei die Funktion f(x) = -0,5x - 2. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Parabel $y=x^2+x+1$, die dem Graph von f parallel ist!

7. Weisen Sie nach, dass für die Funktion f mit $f(x) = 0,5(x^2 + 2x + 2)$ folgende Differentialgleichung gilt: $1+(f\,')^2 = 2\,f\,f\,''$!

8. Für jede Zahl aiR ist durch $f_a(x) = x^3 + 0,5ax^2 + (a+1)x$ eine Funktion f_a und ein Schaubild K_a gegeben.
   a) Es gibt zwei Punkte, die auf allen Kurven K_a liegen. Gib ihre Koordinaten an.
   b) Zeige: Es gibt eine Stelle x_o, für welche die Tangenten aller Kurven K_a parallel sind. Gib x_o und die Steigung der Tangenten an.
   c) Für welche a-Werte schneidet K_a die 2. Winkelhalbierende dreimal, zweimal, einmal?
   d) Skizziere die Kurvenschar (K_{-1},K_o,K_1,K_2 und K_3)

6. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2007/08
Komplexaufgaben zur Analysis (Gebrochene rat. Fkt.)

Abgabetermin 17.12.2007

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f durch $y = f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ $(x \in D_f)$

und g durch $y = g(x) = 2 \cdot \ln(x^2+1)$ $(x \in D_g)$.

a) Geben Sie für jede der beiden Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich sowie die Nullstellen an.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie ihres Graphen.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Unter allen Tangenten an den Graphen der Funktion f existiert genau eine mit maximalem Anstieg.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Für jedes a $(a \in R, a > 0)$ ist eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = a \cdot \frac{4x}{x^2+1}$ $(x \in R)$ gegeben.
Weisen Sie nach, dass für jedes a die Funktion F_a mit
$y = F_a(x) = 2a \cdot \ln(x^2+1)$ $(x \in R)$ eine Stammfunktion der Funktion f_a ist.

Für jedes $a > 0$ wird durch den Graphen der Funktion f_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = \sqrt{e-1}$ eine Fläche vollständig begrenzt.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche 8 beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ermitteln Sie mit dem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) oder unter Verwendung der für die Funktion g(x) existierenden Stammfunktion G(x) mit

$$G(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) + 4\arctan x - 4x$$

den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.
Hinweis: Die Funktion $y = \arctan x$ $(x \in R)$
(Arcus-Tangens, GTR-Taste: $\boxed{\tan^{-1}}$)
ist die Umkehrfunktion zu $y = \tan x$ $(x \in R, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$.
Erreichbare BE-Anzahl: 2

Wahlaufgabe 1

Ein Gleisplan einer ebenen Modellbahnanlage wird auf der Grundlage eines kartesischen Koordinatensystems erstellt. Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.

Die beiden geradlinig verlaufenden Gleisabschnitte zwischen den Punkten A(-10; 0) und B(0; 0) sowie zwischen den Punkten C(7; 7) und D(14; 11) sind bereits festgelegt. Zwischen den Punkten B und C soll ein Übergangsbogen so eingepasst werden, dass jeder Übergang zwischen den Schienenstücken ohne Knick erfolgt.
Die Lage der Schienen wird vereinfacht durch ihre Mittellinie bestimmt.

a) Tim schlägt vor, die Lage dieses Übergangsbogens durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion zu ermitteln.

Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades dazu geeignet ist. Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Funktion.

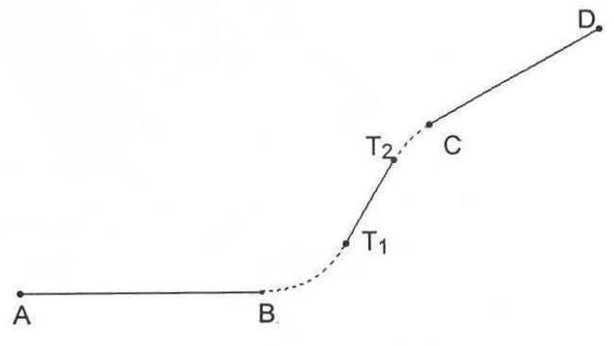
Zeigen Sie, dass auch die Funktion p mit $p(x) = -\frac{17}{2401}x^4 + \frac{24}{343}x^3$ $(x \in R; 0 \le x \le 7)$ die Bedingungen für einen solchen Übergangsbogen erfüllt.

Die Länge eines Kurvenstückes des Graphen einer Funktion f bezeichnet man als Bogenlänge L_f. Die Maßzahl von L_f kann im Intervall $a \le x \le b$ mit der Formel $L_f = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ berechnet werden.

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Maßzahl der Bogenlänge L_p des Graphen der Funktion p zwischen den Punkten B und C.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Tom möchte den Übergangsbogen durch zwei kreisförmige Schienenstücke mit einem Radius von je $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ dm und einem eingeschlossenen geradlinigen Schienenstück herstellen.
Die nebenstehende Skizze zeigt einen Ausschnitt aus einem Gleisplan.



(Skizze nicht maßstäblich)

Das eingeschlossene geradlinige Schienenstück verläuft zwischen den Punkten T_1 und T_2. Der Punkt T_1 ist durch die Näherungswerte seiner Koordinaten $T_1(3{,}5; 2{,}0)$ gegeben.

Ermitteln Sie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes T_2.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

7.Prüfungskomplex Mathematik 07/08

Kurvendiskussion II Exponential- und Logarithmusfunktionen

(Abgabetermin:07.01.08)

Aufgabe 1

Gegeben sind Funktionen f_a durch $y = f_a(x) = 4x\,e^{-ax^2}$ ($x \in R$; $a \in R$, $a > 0$).

a) Zeigen Sie, dass jede der Funktionen f_a genau eine Nullstelle besitzt, und begründen Sie, dass diese von a unabhängig ist!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von f_a, und bestimmen Sie die Art der Extrema!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktionen f_a Wendepunkte besitzen, und ermitteln Sie deren Koordinaten!

d) Berechnen Sie für $a_1 = \frac{1}{18}$ und für $a_2 = \frac{1}{8}$ jeweils die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die der Wendepunkte.
Skizzieren Sie die zugehörigen Graphen der Funktionen f_{a1} und f_{a2} in einem gemeinsamen Koordinatensystem!

e) Für jedes a existiert genau eine Tangente t_a, die den Graph der zugehörigen Funktion f_a im Punkt $P_0(2; y_0)$ berührt.
Stellen Sie eine Gleichung für diese Tangente t_a auf!
Ermitteln Sie den Wert von a für den Fall, dass t_a die x-Achse an der Stelle -1 schneidet!

f) Die lokalen Extrempunkte aller Graphen von f_a liegen auf der Geraden g, die Wendepunkte aller Graphen von f_a auf der Geraden h.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g und h!

Aufgabe 2

Geben sind die Funktionen f_k durch

$$y = f_k(x) = (\ln x)^2 - k \ln x + 0{,}75 \quad (x \in R; x > O; k \in R).$$

a) Berechnen Sie für die Funktion f_2 die Nullstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und geben Sie die Art der Extrema an. Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

b) Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle:

x	0,2	0,5	1	1*	2	e	2*	6	e²	8
y										

1* = Wurzel aus e; 2* = Wurzel aus e hoch 3

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $0{,}2 \le x \le 8$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion f_2 und der Abszissenachse eingeschlossen wird.

(Es gilt: 3* lnx dx = x.lnx - x + c) 3* = Integrationszeichen

d) Die Anzahl der Nullstellen von f_k hängt von k ab. Geben Sie alle möglichen Fälle an.

e) Weisen Sie nach, dass jede der Funktionen f_k ein lokales Minimum besitzt.
Geben Sie die Koordinaten des Minimumpunktes in Abhängigkeit von k an.

f) Berechnen Sie für $k > 0$ die Gleichungen der Tangenten an die Graphen der Funktionen f_k im jeweiligen Punkt R_k (1;f(1)). Diese Tangenten schneiden die Koordinatenachsen in den Punkten P_k und Q_k.
Ermitteln Sie dasjenige $k > 0$ für welches der Flächeninhalt des Dreiecks P_kOQ_k am kleinsten wird. Geben Sie diesen Flächeninhalt an.

Brand-Erbisdorf, den 07.01.2008

8. Prüfungskomplex-Mathematik Schuljahr 2007/08 Abgabetermin
Winkelfunktionen 21.01.2008

1. Aufgabe Analysis aus dem Pflichtteil

Für jedes a ($a \varepsilon R$, $a>0$) ist eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = (a^2 + 1)(\sin(ax) + \cos(ax))$ ($x \varepsilon R$, $0 \leq x \leq 2\pi a^{-1}$) gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion f_2 die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte, die Art der Extrema, die Koordinaten der Wendepunkte und den Wertebereich an. Ermitteln Sie den maximalen Anstieg dieser Funktion.

b) Geben Sie eine Gleichung der Normalen n an den Grafen der Funktion $f_{0,5}$ im Schnittpunkt mit der y-Achse an. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Grafen der Funktion $f_{0,5}$, der x-Achse und der Geraden n im I. Quadranten eingeschlossen wird.

c) Für jedes a ($a \varepsilon R$, $a>0$) existiert eine Tangente t_a an den Grafen der Funktion f_a im Schnittpunkt mit der y-Achse. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangenten t_a. Bestimmen Sie a so, dass der Anstieg der zugehörigen Tangente t_a den Wert 2 hat.

Für jedes a wird durch die Koordinatenachsen und den Grafen der Funktion f_a im I. Quadranten eine Fläche vollständig begrenzt.

d) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

e) Weisen Sie nach, dass es genau ein a gibt, für das der Inhalt dieser Fläche extrem ist. Ermitteln Sie die Art des Extremums und geben Sie für diesen Fall den Flächeninhalt an.

2. Aufgabe Analysis aus dem Wahlteil

Für jedes t ($t \varepsilon \mathbf{R}$, $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = t \sin(tx) + t$ ($x \varepsilon \mathbf{R}$, $x > 0$) gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion f_t.
Weisen Sie die Art der Extrema nach.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen eingeschlossen wird.

c) Für jede Funktion f_t betrachten wir den Wendepunkt mit der kleinsten Abszisse. Bestimmen Sie den Wert t, für den der Abstand dieses Wendepunktes vom Koordinatenursprung minimal ist.

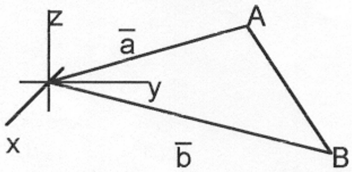
d) Ermitteln Sie alle Werte t, für die die jeweils zugehörige Funktion f_t im Intervall $0 \leq x \leq 2p$ mindestens 8 Nullstellen besitzt.

9. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2004/05
Vektorrechnung und Analytische Geometrie, Beweise

Abgabetermin 18.02.08

1. Bestimme die Menge aller Vektoren $\bar{x}$, die zu $\bar{a} = -2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ und $\bar{b} = 7\bar{i} + 3\bar{k}$ orthogonal sind.

2. A u. B seien zwei Punkte der Ebene mit den Ortsvektoren $\bar{a}$ u. $\bar{b}$. Zeigen Sie, daß
$$2(\bar{a} - \bar{b}) \circ \bar{x} = \bar{a}^2 - \bar{b}^2$$
eine Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ ist.



3.a) Es sei g_k die Gerade durch A(1,-2,-4) mit dem Richtungsvektor
$$\bar{a}_k = (2k+4)\bar{i} + k\bar{j} + \bar{k} \quad \text{mit } k\in R.$$
Zeigen Sie, daß jede Gerade g_k orthogonal zur Geraden OA ist.

b) Die Geraden g_k bilden eine Ebene E. Bestimmen Sie eine Normalform und eine Parametergleichung von E.

c) Für welchen Wert von k ist g_k orthogonal zur Geraden h_k?
$$h_k:\quad \bar{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3-4k\\k\end{pmatrix}$$
Zeigen Sie, daß g_k und h_k für keinen Wert von k parallel sind.
Berechnen Sie den Abstand $d(g_k,h_k)$ für k=0 und k=1.

d) Zeigen Sie, daß die Vektoren
$$\bar{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix},\quad \bar{b} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix},\quad \bar{u}_k = \begin{pmatrix}2k+4\\k\\1\end{pmatrix}$$ für jeden Wert von k
linear unabhängig sind.

e) Berechnen Sie den Wert s, für welchen $\bar{u}_s$ und $\bar{u}_{-2}$ orthogonal sind.

f) Bestimmen Sie Zahlen d, e, f so, daß $\{d\bar{a},\ e\bar{u}_{-2},\ f\bar{u}_s\}$ eine Basis von R^3 bildet, welche aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren besteht.

4. Wir betrachten die Punkte A(1|0|0), B(0|1|0), C(0|0|1) und die Punkte P(t|0|t), Q(1-2t|t|t) mit dem Parameter t.
   a) Stellen Sie für t=0,5 Gleichungen für die Geraden BP und 0Q auf, und untersuchen Sie, ob sich diese Geraden schneiden!
   b) Für welchen Wert von t sind die Richtungsvektoren von BP und 0Q linear abhängig?
   c) Für welchen Wert von t besitzen die Geraden BP und 0Q einen Schnittpunkt? Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes!
   d) Für welches t liegt U(t|t|t) in der Ebene ABC?

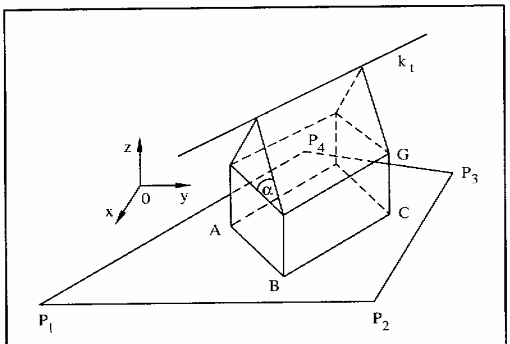
5. In einem regelmäßigen Tetraeder sind alle Kanten gleich lang und alle von den Kanten eingeschlossenen Winkel gleich groß.
Beweise, daß je zwei gegenüberliegende Kanten orthogonal sind.

6. Eine an einem Mast wirkende Zugkraft werde vom Mast und zwei Spannseilen aufgenommen, wobei der Mast nur Druckkräfte in seiner Längsrichtung und die Seile nur Zugkräfte in ihrer Richtung erzeugen. Zur beschreibung wird ein kartesisches koordinatensystem eingeführt, dessen z-Achse in Mastrichtung zeigt. Der Ursprung befindet sich im Angriffspunkt der Kräfte. Die zugkraft kann durch den Vektor $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ beschrieben werden und die Richtungen der Zugseile durch $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ bzw. $\mathbf{b}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.
Bestimmen Sie die Beträge der Kräfte $\mathbf{F}_M$, $\mathbf{F}_{S1}$ und $\mathbf{F}_{S2}$ im Mast und in den Seilen! (**Vektoren** ohne Pfeil, dafür **fett**)

10. Prüfungskomplex
- Analytische Geometrie -

Termin : 03.03.2008

Familie Baumann hat sich ein Grundstück gekauft und möchte darauf ein Eigenheim errichten. Das ebene, viereckige Grundstück wird durch die Grenzsteine
P_1 (25; 0; 0), P_2 (x_2; y_2; 0), P_3 (–2; 36; 0) und P_4 (–5; 15; 0) markiert (1 LE $\hat{=}$ 1 m).
Die Grenzsteine P_2 und P_4 liegen achsensymmetrisch zur Diagonale $\overline{P_1P_3}$.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Standortkoordinaten des Grenzsteines P_2.
Welchen Grundstückspreis mußte Familie Baumann bezahlen, wenn der Quadratmeterpreis des erschlossenen Grundstücks 73 DM beträgt? (6 BE)

Das Eigenheim kann als Quader mit einem aufgesetzten, dreiseitigen, geraden Prisma angenommen werden. Der Punkt C(4; 33; 0) ist ein Eckpunkt der Fundamentplatte. Jedes Haus des gewählten Typs hat eine Breite $\overline{AB}$ = 10 m und eine Länge $\overline{BC}$ = 15 m.
Die beiden Rechtecke des Daches liegen in Ebenen

E_t: $3tx + 4ty + 25z = 144t + 200$ bzw.
F_t: $3tx + 4ty - 25z = 94t - 200$ ($t \in R$; $t > 0$).

Der Dachneigungswinkel α wird durch den Parameter t beeinflußt (siehe Skizze).

b) Zeigen Sie, daß die Seitenwandhöhe $\overline{CG}$ jedes solchen Hauses von der Wahl des Parameters t unabhängig ist, und berechnen Sie diese. (3 BE)

c) In einer speziellen Ausführung des Projektes liegen die Dachflächen in den Ebenen E_5 bzw. F_5.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Dachfirstgeraden k_5.
Weisen Sie nach, daß die Dachebenen E_5 und F_5 orthogonal zueinander sind.
Für die Finanzierung des Hauses wird der umbaute Raum (Gesamtvolumen des Hauses ohne Berücksichtigung der Wandstärken) benötigt.
Berechnen Sie für dieses spezielle Projekt den umbauten Raum. (5 BE)

d) Um den umbauten Raum zu verkleinern, soll der Dachneigungswinkel α verringert werden. Als Auflage vom Bauamt muß dieser Winkel zwischen einschließlich 30° und 45° liegen.
Berechnen Sie für diese Bedingungen das Intervall der möglichen Parameterwerte von t. (3 BE)

e) Zum Bau des Hauses wird ein Turmdrehkran mit horizontalem Ausleger verwendet. Der Kran soll so aufgestellt werden, daß die Grenzsteine P_1, P_3 und P_4 gleichweit vom Standort des Kranes entfernt sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Kranstandortes und die erforderliche Auslegerlänge.
Überprüfen Sie, ob durch solch einen Kran bei dieser Aufstellung das gesamte Grundstück erreicht werden kann. (3 BE)

(20 BE)

2) Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sind die Ebene

$E: 2x + z - 3 = 0$

und für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gerade

$$g_t: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Für welchen Wert von t ist die Gerade g_t parallel zu E?
Ist g_t für dieses t in E enthalten?
Berechnen Sie für alle übrigen Werte von t den Schnittpunkt S_t von E und g_t.
Bestimmen Sie den Wert von t, für den g_t senkrecht zu E ist!

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_t mit der Geraden

$$h_t: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß der Vektor $\begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren von g_t und h_t ist.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_t, die die Geraden g_t und h_t enthält.
Für welche Werte von t geht diese Ebene durch den Ursprung?

c) Für $t = -2$ ist E_{-2} durch die Koordinatengleichung $2x - z = 1$ gegeben. Berechnen Sie den Winkel zwischen E und E_{-2}.
Zeigen Sie, daß jeder Punkt der Ebene $x = 1$ von E den gleichen Abstand hat wie von E_{-2}.

11. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2007/08
Komplexaufgaben zur Geometrie

Abgabetermin 17.03.2008

Aufgabe 1)

Zur Beschreibung der Position von Flugzeugen im Luftraum werde ein kartesisches Koordinatensystem benutzt. Die als eben angenommene Erdoberfläche liege in der x-y-Ebene.
Die Flugbahn des Flugzeuges F_1 verläuft geradlinig durch die Punkte P(0;15;8) und Q(2;13;8). Für jedes k ($k \in N$, $0 < k \leq 20$) verläuft eine mögliche geradlinige Flugbahn des Flugzeuges F_2 durch die Punkte $S_k\left(15; -2{,}5; \frac{k}{2}\right)$ und $T_k(30; -10; k)$.

a) Zeigen Sie, dass für k = 12 die beiden Flugzeuge auf den Bahnen kollidieren können.

b) Das Flugzeug F_2 befindet sich auf einer der möglichen Flugbahnen im Punkt S_k. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug F_2 in jedem Fall von der im Punkt O(0; 0; 0) befindlichen Bodenstation gesehen werden kann, wenn die Sichtweite 18 Längeneinheiten beträgt.

c) Von einem „Beinahezusammenstoß" spricht man, wenn der Abstand zweier Flugzeuge weniger als eine Längeneinheit beträgt.
Für welche Werte von k kann es auf den Bahnen der Flugzeuge F_1 und F_2 zu einem „Beinahezusammenstoß" kommen?

d) Die geradlinig verlaufende Grenze zum Nachbarland geht durch die Punkte G(0; –33; 0) und H(100; –83; 0). Die Grenze des Luftraumes ist eine zur Erdoberfläche (x-y-Ebene) senkrechte Ebene, die die Landesgrenze enthält.
Aus Sicherheitsgründen muss sich ein Flugzeug bei Annäherung an das Nachbarland spätestens bei dessen Bodenstation anmelden, wenn der Abstand zur Luftraumgrenze 10 Längeneinheiten beträgt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich Flugzeug F_1, welches sich im Punkt P befindet und sich der Luftraumgrenze des Nachbarlandes nähert, spätestens bei der Bodenstation des Nachbarlandes anmelden muss.

Aufgabe 2)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Gerade g durch

$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$, für jedes $k \in R$ eine Ebene ε_k durch

$\varepsilon_k:\ 4k \cdot x + (4k-1) \cdot y - 5z = -26$ sowie die Punkte $A(6; -15; 16)$ und $C(18; -6; 1)$ gegeben.

Die Ebene η enthält die Gerade g sowie den Punkt A.

a) Begründen Sie, dass die Ebene η durch g und A eindeutig bestimmt ist.

Zeigen Sie, dass der Punkt C ebenfalls in η liegt.

Die Schnittpunkte S_x, S_y, S_z der Ebene η mit den Koordinatenachsen und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Körpers.
Ermitteln Sie das Volumen dieses Körpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Untersuchen Sie, ob es einen Wert k gibt, so dass die Gerade g die Ebene ε_k senkrecht schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Auf der Geraden g existieren genau zwei Punkte B und D derart, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrats mit der Diagonalen $\overline{AC}$ sind.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

d) Das Quadrat aus Aufgabenteil c) ist die Grundfläche eines Würfels. Es existieren gerade Kreiskegel, deren Grundfläche in der Ebene η liegen und die diesen Würfel vollständig enthalten. Unter diesen Kreiskegeln existiert genau ein Kegel mit kleinstmöglichem Volumen.

Ermitteln Sie den Radius des Grundkreises und die Höhe dieses Kegels.

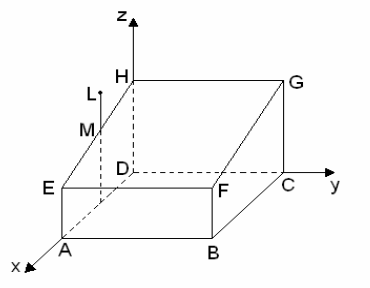
Erreichbare BE-Anzahl: 5

12 .Prüfungskomplex Mathematik 07/08

Anwendungen Analytische Geometrie (Abgabetermin:31.03.08)

Aufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Eckpunkte A, B, C, D und E, F, G, H eine Garage mit rechteckiger Grundfläche und Pultdach. Drei Kanten liegen auf den Koordinatenachsen; der Boden ist Teil der x-y-Koordinatenebene.
Es ist A(5; 0; 0), B(5; 3; 0), E(5; 0; 2,5) und H(0; 0; 4) (Angaben in Metern). (Skizze nicht maßstäblich)



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C, D, F und G.

b) Berechnen Sie den Rauminhalt der prismenförmigen Garage sowie den Flächeninhalt des Daches!

c) Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene ε der Dachfläche auf und ermitteln Sie den Neigungswinkel α des Daches zur x-y-Koordinatenebene!

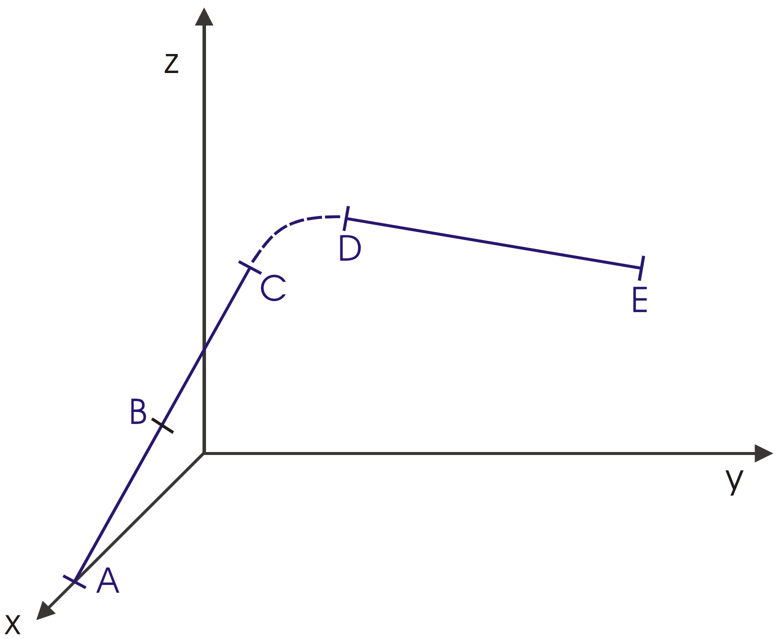
d) Eine Lampe L befindet sich 1m über dem Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$. In welchem Punkt P_o trifft ein Lichtstrahl von L durch den Punkt F die x-y-Koordinatenebene? Geben Sie die Koordinaten des Punktes P_o an!

e) Durch den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$ verläuft eine Parallele zur y-Achse. Auf dieser steht ein Kind so, dass es die Lampe L (aus Teilaufgabe d) gerade noch sehen kann.
In welcher Entfernung von der Kante $\overline{BC}$ muss sich das Kind mit einer Augenhöhe von 1m aufstellen?

f) Auf der Kante $\overline{FG}$ existiert ein Punkt T so, dass gilt: $\overline{CT} \perp \overline{FG}$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T!

Aufgabe 2

Ein Flugobjekt startete im Punkt A(8/0/0) und wurde danach in den Punkten B(6/1/2), C(4/2/4), D(0/4/4) und E(-4/6/2) geortet (siehe Skizze).
(1 Längeneinheit = 1 km)
Der Flug erfolgte zwischen A und C und zwischen D und E geradlinig, dabei zwischen B und C mit einer konstanten Geschwindigkeit.



a) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes P an, der auf der Flugbahn zwischen A und B liegt und nicht Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.

b) Das Flugobjekt legte die Strecke $\overline{BC}$ in genau 1 min zurück. Berechnen Sie die Geschwindigkeit für dieses Teilstück.

c) Das Flugobjekt landet unter Beibehaltung der Flugrichtung $\overrightarrow{DE}$ im Punkt L der x-y-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes L.

d) Zeigen Sie, dass der Flug von A nach L gänzlich in ein und derselben Ebene ε erfolgt sein kann.

Aufgabe 3

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung.
Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7,2 \\ -9,6 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Längeneinheit ist 1 km.

a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.
   Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt
   Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.
   Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1.

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km. In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein?
   Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.
   Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt R(-lO,2;-13,6;O) eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius *85* km.
   Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte G_1 (84;-3;0) und G_2(12;-99;0).
   Wie weit hinter der Grenze kann ein im Nachbarland landendes Flugzeug von dem Radar noch erfasst werden?

   Erläutern Sie Argumente, welche die errechnete Lösung in Frage stellen können.

Brand-Erbisdorf, den 31.03.2008

FB Mathematik Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

13. Prüfungskomplex-Mathematik/Leistungskurs Schuljahr 2007/08

Prüfungsaufgabe Stochastik zur Thematik Binomialverteilung, Kombinatorik und Verknüpfung von Ereignissen

Ein Betrieb hat sich auf die Produktion elektronischer Bauelemente spezialisiert. Erfahrungsgemäß sind 12 % der produzierten Bauteile defekt.

a) Der laufenden Produktion werden 5 Bauteile entnommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens eines dieser Bauteile defekt?

b) Einer Tagesproduktion von 50 Stück, die genau 6 defekte Teile enthält, werden 5 Teile entnommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens eines dieser Bauteile defekt?

In diesem Betrieb wird durch ein Prüfgerät ein defektes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 als defekt erkannt. Allerdings zeigt das Prüfgerät auch einwandfreie Teile fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 als defekt an.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Prüfgerät die richtige Entscheidung trifft?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt das Gerät ein der laufenden Produktion entnommenes Bauteil als defekt an?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein als defekt angezeigtes Bauteil auch wirklich defekt ist?

f) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein durch das Prüfgerät als nicht defekt angezeigtes Teil auch wirklich nicht defekt ist.

Abgabetermin: 14.04.2008

Teil C: Stochastik

Adam hat für seinen GTR ein Spaßprogramm geschrieben, das (in Anlehnung an bekannte Bildschirmschoner) den Anfangsbuchstaben "A" seines Namens an zufällig gewählte Stellen des Displays schreibt. Das Display seines GTR hat 8 Zeilen mit je 16 Feldern. In jedem Feld kann genau ein Zeichen dargestellt werden.
Sein Programm startet stets mit leerem Display (s. Abb. 1).

```
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
----------------
```

Abb. 1

Danach wird per Zufallsgenerator ein Feld ausgewählt und in dieses der Buchstabe "A" geschrieben. Dieser Versuch wird insgesamt 10-mal durchgeführt.
Wird ein Feld ermittelt, in dem bereits "A" steht, ergibt sich keine Änderung auf dem Bildschirm. Es können also bis zu 10 Buchstaben "A" nach Programmende auf dem Display stehen (z.B. s. Abb.2).

```
----------------
--A----A--------
--------A-------
-----AA------A--
----------A-A---
----------------
------A---------
-----------A----
```

Abb. 2

a) Nach einer Ausführung des Programms stehen 10 Buchstaben "A" auf dem Display. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Anordnungen dieser 10 Buchstaben "A" auf dem Display möglich sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende in der ersten Zeile wenigstens einmal ein "A" steht. Ermitteln Sie, wie oft das Programm durchschnittlich ein Feld in der ersten Zeile auswählt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Das Programm wird jetzt so verändert, dass es nicht nach 10 Versuchen abbricht. Ermitteln Sie, wie viele Versuche notwendig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal ein Buchstabe "A" in der ersten Zeile steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) In einer weiteren Form des Programms werden drei Versuche durchgeführt. Wird dabei ein Feld ermittelt, in dem bereits ein "A" steht, wird dieser Buchstabe gelöscht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende genau einmal der Buchstabe "A" auf dem Display steht.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Adam arbeitet in einer Firma, die einen GTR- Typ zusammenbaut. Die Zulieferfirmen F1 und F2 liefern unabhängig voneinander ein bestimmtes Bauteil für diesen GTR. Andere Hersteller für dieses Bauteil gibt es nicht. 4% der Bauteile der Firma F1 und 6% der Bauteile der Firma F2 sind fehlerhaft. Zwei Drittel aller fehlerhaften Bauteile sind von der Firma F1.

e) Ermitteln Sie für beide Zulieferfirmen jeweils den prozentualen Anteil an der Gesamtlieferung dieses Bauteils.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Bei einer Lieferung von 2000 Stück dieses Bauteils, die alle von derselben Zulieferfirma kommen, ist durch einen Verlust des Lieferscheines nicht mehr feststellbar, welche der beiden Zulieferfirmen der Produzent war. Folgende Entscheidungsregel wird getroffen: Sind mehr als 99 Teile fehlerhaft, wird die Lieferung der Firma F2 zugeordnet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung fälschlicherweise der Firma F2 zugeordnet wird, obwohl sie in Wirklichkeit von der Firma F1 kommt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe D 2: Stochastik

Bei einem Flugsimulator wird ein Flugverlauf durch einen Computer simuliert. Für die Festlegung der Flugroute wird das gedachte Übungsgebiet mit einem x-y-Koordinatensystem unterlegt. Der Beginn des „Fluges" ist stets auf der y-Achse. Die möglichen Flugrouten werden durch Graphen der Funktionen f_a mit

$y = f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 - ax + a \quad \left(a \in \left\{-3;\ \frac{1}{2};\ 2;\ 3\right\},\ x \in R,\ x \geq 0\right)$ beschrieben.

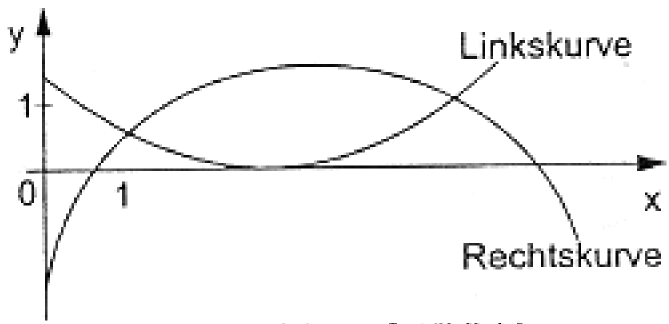
Der Parameter a wird vor jedem simulierten Flug neu und unabhängig vom vorangegangenen Flug durch den Computer mit folgenden Wahrscheinlichkeiten ermittelt:

$P(a = -3) = 0{,}3$, $P\left(a = \frac{1}{2}\right) = 0{,}1$, $P(a = 2) = 0{,}4$ und $P(a = 3) = 0{,}2$.

a) Vier Personen absolvieren nacheinander je genau drei „Flüge" am Flugsimulator.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen von Flugrouten sind dabei möglich?

Erreichbare BE-Anzahl: 1

b) In der Skizze sind mögliche Flugrouten mit einer Rechtskurve und einer Linkskurve dargestellt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, daß bei 12 simulierten Flügen höchstens zwei Rechtskurven durchflogen werden.



(Skizze nicht maßstäblich)

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Schneidet bzw. berührt eine Flugroute die x-Achse, wird durch den Computer eine Sonderaktion (z. B. Ausfall eines Triebwerkes) simuliert.
Wie viele Sonderaktionen sind durchschnittlich bei 12 simulierten Flügen zu erwarten?

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Bei einer Veränderung des Computerprogrammes werden auch die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des Parameters a verändert. Herr Meyer behauptet, die Wahrscheinlichkeit, eine Rechtskurve zu „durchfliegen", sei mindestens 0,5. Bei einem Test tritt in 6 von 20 Versuchen eine Flugroute mit einer Rechtskurve auf. Herr Meyer verwirft deshalb seine Behauptung.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art bei diesem Test.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

I)

Teil A: Analysis

Aufgabe A 1

Gegeben sind die Funktionen f_t durch

$$y = f_t(x) = \frac{t^2+2}{2} \cdot \cos(tx) \qquad (t \in R, t > 0; x \in R).$$

a) Führen Sie für die Funktion f_2 eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Symmetrie, kleinste Periode, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).

Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_2 im Intervall $0 \le x \le \pi$.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion f_2 im Punkt $P\left(\frac{\pi}{4}; f_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

b) Für jedes t begrenzen die beiden Koordinatenachsen und der Graph der Funktion f_t im Intervall $0 \le x \le \frac{\pi}{2t}$ eine Fläche A_t vollständig.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von t.
Ermitteln Sie den Wert für t, für welchen diese Fläche minimal wird.

Die Fläche A_2 erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper. Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

c) Gegeben ist die Funktion g durch $y = g(x) = 2\sin(4x) \qquad (x \in R)$.

Zeichnen Sie den Graph der Funktion g im Intervall $0 \le x \le \pi$ in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a) ein.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f_2 und g.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Die Funktion s ist gegeben durch $y = s(x) = f_2(x) + g(x)$.

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion s im Intervall $0 \le x \le \pi$, und untersuchen Sie die Art der Extrema.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

II. Gegeben sind die Funktionenscharen f_k und g_k mit

$$f_k(x) = kx + \sin\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{und} \quad g_k(x) = kx^2 + \sin\left(\frac{x}{k}\right), \quad k > 0.$$

a) Untersuche die Funktion f_1 auf Symmetrie, Null-, Extrem- und Wendestellen. Zeichne den Graphen von f_1 im Intervall $[-\pi; \pi]$. (TR)

b) Zeichne den Graphen von g_1 durch Überlagerung zweier Funktionsgraphen. Welche Aussage kann man ohne Berechnung über Anzahl und Lage der Nullstellen und der Extrempunkte machen?

c) Welche Punkte haben die Graphen von f_k und g_k gemeinsam?
Zeige: Die Graphen von f_k und g_k können sich im Ursprung nicht senkrecht schneiden und können im Ursprung keine gemeinsame Tangente haben.

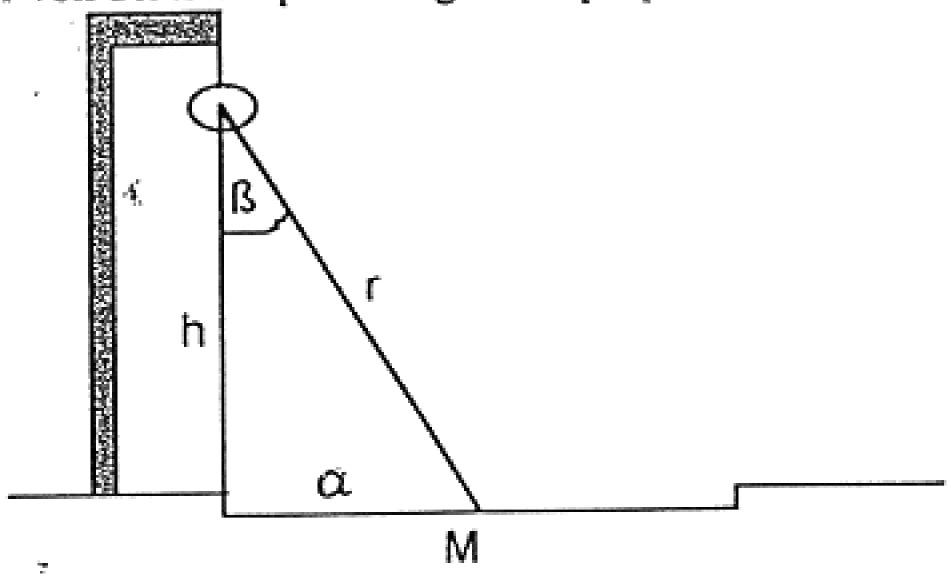
d) Berechne den Flächeninhalt der von den Graphen von f_k und g_k ~~ein~~-geschlossenen Fläche?
Für welche k beträgt der Flächeninhalt 1?

e) Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte der Funktionenschar f_k mit betragsmäßig kleinster 1. Koordinate im 1. Quadranten? Zeichne die Kurve.

f) Für welche $k \in \mathbb{R}$ haben die Graphen der Funktionenschar f_k Extrempunkte?
Welcher Sonderfall ergibt sich für $k = 1$?

Extremwertaufgaben

1. Eine Straße bekannter Breite soll durch am Straßenrand stehende Lampen beleuchtet werden (s. Bild). Wie hoch müßte man die Lampen anbringen, damit die Mitte der Straße möglichst hell beleuchtet wird, wenn die Beleuchtungsstärke B im Punkt M dem Kosinus des Winkels ß proportional und dem Quadrat des Abstandes r von der Lichtquelle umgekehrt proportional ist?



2. Aus drei Holzbrettern von je 20cm Breite soll eine Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt gebaut werden. Geben Sie eine Konstruktionsanweisung, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird.

3. In der Parabelballistik gilt für die Schußweite s (in der Horizontalen gemessen)

$$s = f(ß) = \frac{v^2}{g}\left(\sin 2ß - 2\cos^2 ß \tan\mu\right)$$

Hierbei ist v die Anfangsgeschwindigkeit, g die Fallbeschleunigung auf der Erde, ß der Abschußwinkel und μ der Geländewinkel (s. Skizze). Bei welchem Winkel ß ist die Schußweite am größten?